ব্যবসায় গণিত (Business Mathematics)

GE-EC-21

একক ১(ক) ❑ অনুপাত (Ratio) ও সমানুপাত (Proportion)

গঠন

১(ক).১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ার পর আপনি সাম্যানুপাত, বৈষম্যানুপাত, গুরু, লঘু, ব্যস্ত, সরল, মিশ্র, প্রমেয়, অপ্রমেয় এবং ক্রমিক অনুপাতের পার্থক্য নির্দেশ করে এগুলির সংজ্ঞা দিতে পারবেন। সমানুপাত ও ক্রমিক সমানুপাতের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।

১(ক).২ অনুপাত বলতে কী বোঝায়?

একটি রাশি বা পদ (যেমন 'a' বা '2') এবং অপর একটি সমজাতীয় (Homogeneous) রাশি বা পদ-এর (যেমন 'b' বা '3') মধ্যে পরিমাণগত (Quantitative) তুলনামূলক যে সম্পর্ক থাকে তা'কে বলা

হয় অনুপাত। অর্থাৎ, সমজাতীয় ও একই একক (Unit)-এর প্রকাশ করা দু'টি রাশির মধ্যে একটি রাশি অপর রাশির তুলনায় কতগুণ বড় বা ছোট তা যার দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাকে বলা হয় রাশি দু'টির অনুপাত।

সাধারণভাবে বলা যায় যে, 'a' ও 'b' যদি দুটি সমজাতীয় রাশি হয়, তবে 'a' ও 'b' (যেখানে $b \neq 0$, অর্থাৎ b is not equal to '0')—এই দুই রাশির অনুপাতকে $a : b$ আকারে প্রকাশ করা হয়। এই প্রসঙ্গে বলা প্রয়োজন যে, দু'টি রাশির অনুপাত বলতে রাশি দু'টির ভাগফলকেই বোঝায়।

যেমন ঃ $a : b = \frac{a}{b}$

১(ক).৩ অনুপাত-এর গুরুত্ব

গণিতে এবং বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় সাধারণত সমজাতীয় (বা সমসত্ত্ব) রাশির অনুপাত ব্যবহৃত হয়। একটি উদাহরণ দিলে বক্তব্যটি পরিষ্কার হবে। আমরা সবাই লক্ষ্য করেছি যে, ম্যাপ-এ সবসময় একটি স্কেল (Scale) দেওয়া থাকে যেমন, 1 : 1,000,000 [অর্থাৎ, 1 সেমি = 1,000,000 সেমি]। এর অর্থ হল ম্যাপে প্রদর্শিত দুটি স্থানের প্রকৃত দূরত্ব 10 কিলোমিটার হলে ($\because$ 1,000,000 সেমি = 10 কিলোমিটার) ম্যাপে সেই দূরত্বকে 1 সেন্টিমিটার হিসাবে দেখানো হয়েছে।

১(ক).৪ অনুপাত-এর রাশি বা পদ-এর নাম

'a' ও 'b' -এই দুই রাশি বা পদ যদি সমজাতীয় হয়, তবে 'a' ও 'b' রাশি দু'টির অনুপাত হল a : b বা $\frac{a}{b}$। এখানে 'a' ও 'b' **কে অনুপাতটির রাশি বা পদ বলা হয়।** 'a' **রাশি** বা **পদ**-কে বলা হয় **'পূর্বরাশি' বা পূর্বপদ'** (Antecedent), আর 'b' **রাশি** বা **পদ**-কে বলা হয় 'উত্তররাশি' বা 'উত্তরপদ' (Consequent)।

১(ক).৫ অনুপাত-এর 'একক' (Unit)

সমজাতীয় দু'টি রাশি বা পদ-এর অনুপাত নির্ণয় করতে হলে রাশি বা পদ দু'টিকে একই 'একক'-এ প্রকাশ করতে হয়। যেমন '3 টাকা' ও '60 পয়সা'—এই দুই রাশি বা পদ একই 'একক'-এ প্রকাশ করা হয়নি। সুতরাং, '3 টাকা'-কে 'পয়সা'-য় প্রকাশ করতে হবে, যা হবে '300 পয়সা'। এখন রাশি দু'টি

সমজাতীয় ও একই এককে প্রকাশিত হ'ল। সমজাতীয় ও একই একক-এ (পয়সা) প্রকাশিত রাশি দু'টির অনুপাত হল— 300 পয়সা : 60 পয়সা বা 300 : 60

সমজাতীয় ও একই একক-এ প্রকাশিত দু'টি রাশির অনুপাত নির্ণয় করতে হলে প্রথম রাশি বা 'পূর্বপদ'কে দ্বিতীয় রাশি বা 'উত্তর পদ' দিয়ে ভাগ করতে হবে। অর্থাৎ $300 : 60 = \frac{300}{60}$ । এ-থেকে বোঝা যায় যে, একটি পদ (300 পয়সা) অপর পদ থেকে 5 গুণ বড়।

অন্য একটি উদাহরণ ঃ '7 ফুট' ও '1গজ'—এই দুই রাশিকে একই একক-এ প্রকাশ করলে দাঁড়ায়— '7 ফুট' ও '3 ফুট' (কেননা 1 গজ = 3 ফুট)। সুতরাং, রাশি দুটির অনুপাত হ'ল 7 ফুট : 3 ফুট বা 7 : 3 বা $\frac{7}{3}$। সুতরাং দেখতে পাচ্ছেন, অনুপাতের কোন একক নেই।

১(ক).৬ অনুপাত প্রসঙ্গে যা যা মনে রাখতে হবে

(১) সাম্যানুপাত ও বৈষম্যানুপাত ঃ

কোন অনুপাতের দুটি পদ-এর মান যদি পরস্পর সমান হয় তবে অনুপাতটিকে বলা হয় **সাম্যানুপাত** (Ratio of Equality)। উদাহরণ, 3 : 3 হল একটি সাম্যানুপাত।

অন্যদিকে অনুপাতের দু'টি পদ-এর মান যদি পরস্পর অসমান হয় তবে অনুপাতটিকে বলা হয় **বৈষম্যানুপাত** (Ratio of Inequality)। উদাহরণ, 6 : 5 হ'ল একটি বৈষম্যানুপাত।

(২) গুরু অনুপাত ও লঘু অনুপাত ঃ

কোন অনুপাত-এর পূর্বপদ যদি অনুপাত-টির উত্তরপদ থেকে বড় হয়, তবে অনুপাত-টিকে বলা হয় **গুরু অনুপাত** (Ratio of Greater Inequality)। উদাহরণ, 6 : 3—এই অনুপাতটিকে পূর্ববদ '6' উত্তরপদ '3' থেকে বড়, অর্থাৎ $6 > 3$। তাই অনুপাত-টি হ'ল একটি গুরু অনুপাত।

অন্যদিকে, কোন **অনুপাত-এর পূর্বপদ** যদি অনুপাত-টির উত্তরপদ থেকে ছোট হয় তবে অনুপাতটিকে বলা হয় **লঘু অনুপাত** (Ratio of Lesser Inequality)। উদাহরণ, 3 : 6 অনুপাতটি হল লঘু অনুপাত (কেননা, অনুপাত-টির পূর্বপদ '3' এর উত্তরপদ '6' অপেক্ষা ছোট। অর্থাৎ $3 < 6$। তাই অনুপাতটি হ'ল একটি লঘু অনুপাত।

(৩) ব্যস্ত অনুপাত (Inverse Ratio) ঃ

দু'টি অনুপাতের মধ্যে একটি অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ যদি অন্য অনুপাতটির যথাক্রমে উত্তরপদ ও পূর্বপদ হয় তা'হলে অনুপাত দু'টির যে-কোন একটিকে অপরটির **বিপরীত** বা **ব্যস্ত অনুপাত** (Inverse Ratio) বা **অন্যোন্যক** (Reciprocal) বলা হবে। যেমন 2 : 3— এই অনুপাতের **ব্যস্ত অনুপাত হ'ল 3 : 2**। তেমনি a : b -এর **ব্যস্ত অনুপাত হ'ল b : a**।

ব্যস্ত অনুপাতকে অন্য এক ভাবেও বলা যায়। যেমন, যদি দু'টি অনুপাতের গুণফল 1 হয় তবে একটি অনুপাতকে অন্য অনুপাতটির ব্যস্ত অনুপাত বলা যায়, যেমন 2 : 3 বা $\frac{2}{3}$ এবং 3 : 2 বা $\frac{3}{2}$ —এই দু'টি অনুপাতের গুণফল $\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\right)=1$। তাই এই অনুপাত দু'টি পরস্পর ব্যস্ত অনুপাত।

(৪) সরল অনুপাত (Simple Ratio) ঃ

কোন অনুপাতের পদ বা রাশি দু'টি সমান ও সমজাতীয় (Homogenous) বা সমসত্ত্ব হয়, তবে সেই অনুপাতকে বলা হবে **সরল অনুপাত**। যেমন, 4 টাকা : 6 টাকা, অথবা 3 ফুট : 5 ফুট।

(৫) মিশ্র অনুপাত (Compound Ratio) ঃ

দুই বা তার বেশি অনুপাত-এর **পূর্বপদগুলির ক্রমিক গুণফলকে পূর্বপদ ধরে এর উত্তরপদগুলির ক্রমিক গুণফল-কে উত্তরপদ ধরে** যে নূতন অনুপাত পাওয়া যাবে তাকে ঐ নির্দিষ্ট অনুপাতগুলির মিশ্র অনুপাত বলা হবে। যেমন, 2 : 3, 4 : 7, 5 : 8 —এই তিনটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত হবে, $\frac{2\times4\times5}{3\times7\times8}=\frac{40}{168}$ = 5 : 21 অন্য একটি উদাহরণ হল, $a : b\ ;\ b : c\ ;\ c : d$ —এই তিনটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত হ'ল, $\frac{a\times b\times c}{b\times c\times d}=\frac{abc}{bcd}$।

(৬) প্রমেয় ও অ-প্রমেয় অনুপাত ঃ

যদি কোন অনুপাতকে দু'টি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায়, তবে তাকে বলা হবে **প্রমেয়** (Commensurable) অনুপাত। যেমন 3 : 2 বা a : b।

অন্যদিকে, যদি কোন অনুপাতকে দু'টি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা না যায় তবে সেই অনুপাত-কে বলা হয় **অমেয়** (Incommensurable) অনুপাত। উদাহরণ, $\sqrt{3}$: 2 বা $\sqrt{a} : b$। এই দুই অনুপাত-এ $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{a}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়।

(৭) ক্রমিক অনুপাত (Continued Ratio) ঃ

তিন বা তার বেশি সমজাতীয় পদের অনুপাতকে বলা হয় **ক্রমিক অনুপাত**। উদাহরণ ঃ 4 : 3 : 5 : 6 বা a : b : c : d।

অন্য একটি উদাহরণ ঃ যদি অরুণ, বরুণ ও কিরণ ও হীরণ-এর মাসিক বেতন যথাক্রমে 6000 টাকা, 8000 টাকা, 10,000 টাকা ও 12,000 টাকা হয়, তবে এই চারজনের মাসিক বেতনের ক্রমিক অনুপাত হবে, 6 : 8 : 10 : 12 বা 3 : 4 : 5 : 6।

১(ক).৭ অনুপাতের বিভিন্ন ধর্ম

অনুপাতের বিভিন্ন ধর্ম প্রতিপাদ্য (Proposition) আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা ঃ

● **প্রতিপাদ্য ১ ঃ** (১) যদি কোন একটি অনুপাত-এর উভয় রাশি বা পদের সঙ্গে একই ধনাত্মক (+) রাশি যোগ করা হয় তবে ঃ

[ক] গুরু অনুপাত-এর ক্ষেত্রে অনুপাত এর মান কমে যায় বা হ্রাস পায়।

উদাহরণ ঃ 3 : 2 বা $\frac{3}{2}$, এই গুরু অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে 3 (এটি একটি ধনাত্মক বা Positive সংখ্যা) যোগ করলে নূতন যে অনুপাত তৈরি হবে তার মান দাঁড়াবে $\frac{3+3}{2+3}=\frac{6}{5}$।

ফলে, নূতন যে অনুপাত তৈরি হল (অর্থাৎ $\frac{6}{5}$) তা পূর্বের অনুপাত (অর্থাৎ $\frac{3}{2}$) এর চেয়ে ছোট (কারণ $\frac{3}{2}-\frac{6}{5}=\frac{15-12}{10}=\frac{3}{10}>0$ বা $\frac{3}{2}>\frac{6}{5}$)। এখানে পূর্বের অনুপাতের মান নূতন অনুপাতের মানের তুলনায় $\frac{3}{10}$ বেশি।

অন্য একটি উদাহরণ ঃ $a : b$ অনুপাত-এ যদি $a > b$ (অর্থাৎ, এই অনুপাত একটি গুরু অনুপাত) তবে এই অনুপাত-এর উভয় রাশির সঙ্গে x ধনাত্মক রাশি যোগ করলে অনুপাতটির রূপ হবে ঃ $\frac{a+x}{b+x}$ যা $\frac{a}{b}$ (পূর্বের অনুপাত) থেকে ছোট অর্থাৎ $\frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b}$।

প্রমাণ ঃ $\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{a(b+x)-b(a+x)}{b(b+x)}=\frac{ab+ax-ab-bx}{b(b+x)}$

$$=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$$

এখন প্রশ্নানুসারে $a > b$

$\therefore$ $(a-b)$ ধনাত্মক (+) হবে।

অর্থাৎ $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$

[খ] **লঘু অনুপাত**-এর ক্ষেত্রে অনুপাত এর মান বেড়ে যাবে।

উদাহরণ ঃ $2:3$ বা $\frac{2}{3}$, এই লঘু অনুপাতের উভয় রাশির সঙ্গে 3 যোগ করলে নূতন তৈরি অনুপাতের-এর মান দাঁড়াবে $\frac{2+3}{3+3}=\frac{5}{6}$।

এই নূতন অনুপাতের মান পূর্বের অনুপাত $\left(2:3 \text{ বা } \frac{2}{3}\right)$ অপেক্ষা বেশি।

[প্রমাণ (ক)-এর অনুরূপ]

● **প্রতিপাদ্য ২ ঃ** (১) যদি কোন একটি অনুপাত-এর **উভয় পদ থেকে একই ধনাত্মক রাশি বিয়োগ** (–) করা হয় তবে

[ক] **গুরু অনুপাত-এর ক্ষেত্রে অনুপাত-এর মান বেড়ে যাবে।** [অর্থাৎ, প্রতিপাদ্য (১)-এর বিপরীত]।

উদাহরণ ঃ $3:2$ এই গুরু অনুপাত থেকে একই রাশি (ধরা যাক 1) বিয়োগ করা হল। তা'হলে নূতন অনুপাত হবে $\frac{3-1}{2-1}=\frac{2}{1}$ যা পূর্বের অনুপাত $\frac{3}{2}$ থেকে $\frac{1}{2}$ বড় $\left[\frac{2}{1}-\frac{3}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2}\right]$।

অন্য একটি উদাহরণ ঃ $a>b$ বা $\frac{a}{b}$ এই অনুপাত থেকে x রাশি বিয়োগ করলে নূতন অনুপাত হবে $\frac{a-x}{b-x}$ বা $\frac{a}{b}$ থেকে বড় বা $\frac{a-x}{b-x}>\frac{a}{b}$ [প্রমাণ প্রতিপাদ্য ১-এর অনুরূপ]

[খ] **লঘু অনুপাতের ক্ষেত্রে অনুপাতের মান হ্রাস পাবে** [অর্থাৎ প্রতিপাদ্য ১-এর বিপরীত]।

উদাহরণ ঃ $2:3$ বা $\frac{2}{3}$, এই অনুপাত থেকে 1 বিয়োগ করা হলে নূতন অনুপাত হবে $\frac{2-1}{3-1}=\frac{1}{2}$ যা পূর্বের অনুপাত $\frac{2}{3}$ থেকে ছোট অর্থাৎ $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$।

অন্য একটি উদাহরণ ঃ $a:b$ এই অনুপাতে যদি $a<b$ তবে ঃ $\frac{a-x}{b-x}<\frac{a}{b}$

● **প্রতিপাদ্য ৩ ঃ** $a:b$ এবং $x:y$ হ'ল দু'টি অনুপাত। এই দুই অনুপাত-এর মিশ্র অনুপাত হ'ল $ax:by$,

(১) যদি $a>b$ এবং $x>y$ হয় তবে ঃ

$ax:by>a:b$ [অর্থাৎ মিশ্র অনুপাত পূর্বের অনুপাত থেকে বড়]

একটি সহজ উদাহরণ দিলে এই সিদ্ধান্ত পরিষ্কার হবে। যেমন ঃ

5 : 3 এবং 3 : 1 —এই দুটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত হ'ল 5 × 3 : 3 × 1 = 15 : 3 = 5 : 1 = 5 : 1

সুতরাং $\frac{5}{1}$ (নূতন অনুপাত) $>\frac{5}{3}$ (পূর্বের অনুপাত)।

(২) যদি $a < b$ এবং $x < y$ হয় তবে ঃ

(i) $ax : by < a : b$

(ii) $ax : by < x : y$ [অর্থাৎ মিশ্র অনুপাত পূর্বের দুটি অনুপাত-এর চেয়ে ছোট।]

একটি সহজ উদাহরণ ঃ

3 : 5 এবং 1 : 3 —এই দুই অনুপাত-এর মিশ্র অনুপাত হ'ল $3 \times 1 : 5 \times 3 = 3 : 15 = 1 : 5 = \frac{1}{5}$

[এখানে 3 : 5 এবং 1 : 3—এই দুটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত হ'ল ঃ

$3 \times 1 : 5 \times 3 = 3 : 15 = 1 : 5 = \frac{1}{5}$ [এখানে মিশ্র অনুপাতটি]।

১(ক).৮ উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. $a : b$ যদি 7 : 3 হয় তবে নিম্নের অনুপাতগুলি নির্ণয় করুন।

(ক) $a^2 + b^2 : ab$

(খ) $3a + 4b : 3a - 4b$

সমাধান (ক) $a^2 + b^2 : ab$

বা, $(7)^2 + (3)^2 : 7 \times 3$

বা, $49 + 9 : 21$

বা, 58 : 21 **(উত্তর)**।

সমাধান (খ) $3a + 4b : 3a - 4b$

বা, $3 \times 7 + 4 \times 3 : 3 \times 7 - 4 \times 3$

বা, 33 : 9

বা, 11 : 3 **(উত্তর)**।

উদাহরণ 2. $a + b : a - b = 5 : 2$ হলে $b : a$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $a + b : a - b = 5 : 2$

বা, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{5}{2}$

বা, $5a - 5b = 2a + 2b$

বা, $5a - 2a = 2b + 5b$; বা, $7b = 3a$; বা, $\frac{b}{a} = \frac{3}{7}$

$\therefore b : a = 3 : 7$ **(উত্তর)**।

উদাহরণ 3. $\frac{x-2y}{y-2x} = \frac{1}{2}$ হলে $x : y$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{x-2y}{y-2x} = \frac{1}{2}$

$\therefore 2x - 4y = y - 2x$; বা, $2x + 2x = y + 4y$

বা, $4x = 5y$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$

$\therefore x : y = 5 : 4$ **(উত্তর)**।

উদাহরণ 4. যদি 2, x, 18 ক্রমিক অনুপাতে থাকে, তবে x-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{2}{x} = \frac{x}{18}$ বা, $x^2 = 36$

$\therefore x = 6$

অতএব, x-এর মান হবে 6 **(উত্তর)**।

উদাহরণ 5. যদি $x : y : z = 3 : 4 : 5$ এবং $x + y + z = 120$ হয়, তবে (x, y ও z-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x : y : z = 3 : 4 : 5$

$\therefore \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$ (ধরি)

$\therefore\ x = 3k,\ y = 4k,\ z = 5k$

$\therefore\ x + y + z = 12k$

প্রশ্নানুসারে, $12k = 120$

$\therefore\ k = 10$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x &= 3 \times 10 = 30 \\ y &= 4 \times 10 = 40 \\ z &= 5 \times 10 = 50 \end{aligned}\right\} \text{(উত্তর)}$$

উদাহরণ 6. যদি x : y = 3 : 4 হয়, তবে (7x – 4y) : (3x + y) অনুপাতটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = k$ (মনে করি)

$\therefore\ x = 3k$

$\quad y = 4k$

এখন ঃ $\frac{7x-4y}{3x+y} = \frac{7\times3k-4\times4k}{3\times3k+4k}$

$$= \frac{5k}{13k}$$

$$= \frac{5}{13}$$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত হ'ল 5 : 13 **(উত্তর)**।

উদাহরণ 7. যদি A : B = 3 : 4 এর B : C = 6 : 5 হয়, তবে A : B : C অনুপাতটি কত?

সমাধান ঃ A : B = 3 : 4 = 3 × 3 : 4 × 3 = 9 : 12

B : C = 6 : 5 = 6 × 2 : 5 × 2 = 12 : 10

$\therefore$ A : B : C = 9 : 12 : 10

[যেহেতু দু'টি অনুপাতেই B পদটি রয়েছে সেহেতু B পদ-কে এমন সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে হবে যাতে দু'টি অনুপাতেই B-এর মন সমান হয়।]

উদাহরণ 8. 2 : 3 অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গো 9 যোগ করলে যদি নূতন অনুপাত 3 : 4 হয়, তাহলে অনুপাত-এর পদ দু'টি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি অনুপাতের পদ দু'টি 2x ও 3x

এখন, প্রশ্নানুসারে ঃ $\frac{2x+9}{3x+9} = \frac{3}{4}$

অথবা, $9x + 27 = 8x + 36$

বা, $x = 9$

সুতরাং, 2 : 3 অনুপাতের পদ দু'টি হ'ল 2×9 বা 18 এবং 3×9 বা 27

সুতরাং 2 : 3 অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গে 9 যোগ করলে অনুপাতটি 3 : 4 হবে।

[প্রমাণ 2 : 3 অনুপাতের পদ দুটি হ'ল 18 ও 27 এই দুটি পদের সঙ্গে 9 যোগ করলে পদ দুটি হবে 27 ও 36 অর্থাৎ, নূতন অনুপাত হল 27 : 36 বা 3 : 4]।

উদাহরণ 9. 5 : 37 অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গে কত যোগ করলে এর মান 1 : 3 হবে?

সমাধান ঃ মনে করি 5 : 37 অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গে x যোগ করলে এর মান 1 : 3 হবে।

$$\therefore \frac{5+x}{37+x} = \frac{1}{3} = 15 + 3x = 37 + x = 2x = 22$$

$$\therefore x = 11$$

অতএব, 5 : 37 অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গে যে সংখ্যা যোগ করে অনুপাতের মান 1 : 3 হবে সেই সংখ্যা হ'ল 11।

[প্রমাণ $5 + 11 = 16$, $37 + 11 = 48$ অনুপাত = 16 : 48 বা 1 : 3]।

উদাহরণ 10. একজন পিতা ও তাঁর পুত্রের বয়সের অনুপাত 5 : 3। 10 বছর পরে এদের বয়সের অনুপাত হবে 3 : 2। এদের বর্তমান বয়স কত?

সমাধান ঃ মনে করি পিতার বর্তমান বয়স x বছর এবং পুত্রের বয়স y বছর 10 বছর পরে পিতার বয়স হবে $x + 10$ এবং পুত্রের বয়স হবে $y + 10$।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$ ....(1)

এবং $\frac{x+10}{y+10} = \frac{3}{2}$ ....(2)

(1) থেকে পাই $3x = 5y$ বা $x = \frac{5y}{3}$

x-এর মান (2)-এ বসিয়ে পাই ঃ

$$\frac{\frac{5}{3}y+10}{y+10} = \frac{3}{2}$$

বা, $2\left(\frac{5y}{3}+10\right)=3(y+10)$

বা, $\frac{10y}{3}+20 = 3y + 30$

বা, $\frac{10y}{3} - 3y = 30 - 20$

বা, $\frac{10y-9y}{3}=10$

$\therefore\ y = 30$

$x=\frac{5\times 30}{3}= 50$

অতএব, পিতার বয়স 50 বছর ও পুত্রের বয়স 30 বছর [**উত্তর**]।

উদাহরণ 11. দুই ভাই-এর বর্তমান বয়স 5 ও 8 বৎসর। কত বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত 3 : 4 হবে?

সমাধান ঃ দুই ভাই-এর বর্তমান বয়স 5 ও 8 বৎসর। অতএব এদের বয়সের অনুপাত 5 : 8 বা $\frac{5}{8}$। মনে করি x বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত 3 : 4 হবে।

এখন প্রশ্নানুসারে,

$\frac{5+x}{8+x}=\frac{3}{4}$

বা, $20 + 4x = 24 + 3x$

বা, $x = 4$

সুতরাং 4 বৎসর পরে এদের বয়সের অনুপাত হবে 3 : 4।

[প্রমাণ ঃ 5 + 4 বা 9 ও 8 + 4 বা 12

or, $9 : 12 =\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ বা 3 : 4]।

উদাহরণ 12. ছ'বছর আগে সুন্দর ও সুলেমান-এর বয়সের অনুপাত ছিল 4 : 7 এবং ছ'বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত হবে 7 : 10। তাদের বর্তমান বয়সের অনুপাত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি 6 বছর আগে সুন্দর ও সুলেমান-এর বয়স ছিল যথাক্রমে 4x ও 7x বছর।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{4x+12}{7x+12}=\frac{7}{10}$

সুতরাং, $49x + 84 = 40x + 120$

বা, $9x = 36$

$\therefore x = 4$

$\therefore$ সুন্দরের বর্তমান বয়স $4x + 6 = 4 \times 4 + 6 = 22$ বছর।

সুলেমানের বর্তমান বয়স $7x + 6 = 4 \times 7 + 6 = 34$ বছর।

$\therefore$ সুন্দর ও সুলেমান-এর বর্তমান বয়সের অনুপাত = 22 : 34 = 11 : 17 **[উত্তর]**।

উদাহরণ 13. দু'টি বাড়ির মূল্যের বর্তমান অনুপাত 10 : 13। দু'বছর পর যদি প্রথম বাড়িটির মূল্য 20% ও দ্বিতীয় বাড়িটির মূল্য 4000 টাকা বাড়ে তবে এই দুই বাড়ির মূল্যের অনুপাত দাঁড়ায় 12 : 17 বাড়ি দু'টির প্রাথমিক মূল্য কত?

সমাধান ঃ মনে করি বাড়ি দু'টির বর্তমান বা প্রাথমিক মূল্য যথাক্রমে 10x ও 13x টাকা।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{10x+20\% \quad 10x}{13x+4000}=\frac{12}{17}$

বা, $\frac{10x+2x}{13x+4000}=\frac{12}{17}$

বা, $12x \times 17 = 13x \times 12 + 4000 \times 12$

বা, $204x = 156x + 48000$

বা, $48x = 48000$

$\therefore x = 1000$

অতএব, প্রথম বাড়িটির প্রাথমিক মূল্য হ'ল 10×1000 টাকা বা 10,000 টাকা ও দ্বিতীয় বাড়িটির প্রাথমিক মূল্য হল 13×1000 টাকা বা 13,000 টাকা **[উত্তর]**।

উদাহরণ 14. 35 কেজি জলমিশ্রিত দুধ-এ দুধ ও জলের অনুপাত 5 : 2। এই মিশ্রণে কি পরিমাণ জল মিশ্রিত করলে দুধ ও জলের অনুপাত 2 : 1 হবে?

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে 35 কেজি মিশ্রণে দুধের পরিমাণ হল $\frac{35\times5}{7}$=25 কেজি ও জলের পরিমাণ হ'ল $\frac{2\times35}{7}$=10 কেজি।

মনে করি, ঐ মিশ্রণে 'x' পরিমাণ জল মেশালে দুধ ও জলের অনুপাত হবে 2 : 1 বা $\frac{2}{1}$।

অতএব, $\frac{25+x}{10+x}=\frac{2}{1}$

বা, $25 + x = 20 + 2x$; বা, $20 + 2x = 25 + x$

$\therefore x = 5$

অতএব, পূর্বের মিশ্রণে 5 কেজি জল মেশালে দুধ ও জলের অনুপাত হবে 2 : 1 **[উত্তর]**।

[**প্রমাণ** ঃ নূতন মিশ্রণে দুধের পরিমাণ হল $\frac{2\times 40}{3}=\frac{80}{3}$

জলের পরিমাণ হল $\frac{1\times 40}{3}=\frac{40}{3}$ অর্থাৎ, নূতন অনুপাত হ'ল 80 : 40 = 2 : 1 **(প্রমাণিত)**।]

উদাহরণ 15. দুই ব্যক্তির মাসিক আয়ের অনুপাত 4 : 5 এবং তাদের মাসিক ব্যয়ের অনুপাত 7 : 9। তারা প্রত্যেকে প্রতি মাসে 50 টাকা সঞ্চয় করে। তাদের মাসিক আয় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ যেহেতু দুই ব্যক্তির মাসিক আয়ের অনুপাত 4 : 5, মনে করি এদের মাসিক আয় যথাক্রমে 4x ও 5x টাকা।

আমরা জানি ব্যয় = আয় – সঞ্চয়

সুতরাং, প্রশ্নানুসারে, $\frac{4x-50}{5x-50}=\frac{7}{9}$

বা, $36x - 450 = 35x - 350$

বা, $36x - 35x = 450 - 350$

$\therefore x = 100$

অতএব ব্যক্তিদ্বয়ের মাসিক আয় হল $4x = 4 \times 100 = 400$ টাকা।
$5x = 5 \times 100 = 500$ টাকা। **[উত্তর]**।

উদাহরণ 16. একটি একদিনের ক্রিকেট খেলায় শাস্ত্রী, মঞ্জরেকর ও তেণ্ডুলকর মোট 171 রান করল। যদি শাস্ত্রী ও মঞ্জরেকর এবং মঞ্জরেকর ও তেণ্ডুলকরের রানের অনুপাত উভয় ক্ষেত্রেই 2 : 3 হয় তবে তাদের ব্যক্তিগত রানের সংখ্যা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, শাস্ত্রী, মঞ্জরেকর ও তেণ্ডুলকরের প্রত্যেকের মোট রানের সংখ্যা যথাক্রমে x : y : z

প্রশ্নানুসারে, $x : y = 2 : 3$ এবং $y : z = 2 : 3$

আবার, $x : y = 4 : 6$ এবং $y : z = 6 : 9$

$\therefore x : y : z = 4 : 6 : 9$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{সুতরাং, শাস্ত্রীর মোট রানের সংখ্যা} & \dfrac{171\times 4}{4+6+9} = \dfrac{684}{19} = 36 \quad \text{রান;} \\ \text{মঞ্জরেকরের মোট রানের সংখ্যা} & \dfrac{171\times 6}{19} = \dfrac{1026}{19} = 54 \quad \text{রান ;} \\ \text{এবং তেণ্ডুলকরের মোট রানের সংখ্যা} & \dfrac{171\times 9}{19} = \dfrac{1539}{19} = 81 \quad \text{রান ;} \end{array}\right\} \quad \textbf{[উত্তর]}$$

উদাহরণ 17. দু'টি পাত্রে দুধ ও জলের মিশ্রণের অনুপাত যথাক্রমে 8 : 7 এবং 7 : 8 পাত্র দু'টির মিশ্রণদ্বয় কি অনুপাতে মিশ্রিত করলে চূড়ান্ত মিশ্রণে দুধ ও জলের পরিমাণ সমান হবে?

সমাধান ঃ মনে করি (১) প্রথম পাত্র থেকে x একক মিশ্রণ এবং (২) দ্বিতীয় পাত্র থেকে y একক মিশ্রণ নিয়ে মিশ্রিত করা হ'ল।

অতএব ঃ (১) প্রথম পাত্রের x একক মিশ্রণে দুধের পরিমাণ $= \dfrac{8x}{15}$ একক ও জলের পরিমাণ $\dfrac{7x}{15}$ একক।

(২) দ্বিতীয় পাত্রের y একক মিশ্রণে দুধের পরিমাণ $= \dfrac{7y}{15}$ একক ও জলের পরিমাণ $\dfrac{8y}{15}$ একক।

$\therefore$ চূড়ান্ত মিশ্রণে দুধের পরিমাণ $= \dfrac{8x}{15} + \dfrac{7y}{15}$ একক

জলের পরিমাণ $= \dfrac{7x}{15} + \dfrac{8y}{15}$ একক

এখন, প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{8x}{15} + \dfrac{7y}{15} = \dfrac{7x}{15} + \dfrac{8y}{15}$

$= \dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{15}$ বা, $x = y$ $\quad \therefore \dfrac{x}{y} = 1 = \dfrac{1}{1}$

অতএব, মিশ্রণ দু'টির অনুপাত হবে 1 : 1 **(উত্তর)**।

উদাহরণ 18. জলমিশ্রিত 240 সি সি গ্লিসারিনে জল ও গ্লিসারিনের অনুপাত 1 : 3। এতে আর কত সিসি জল মেশালে জল ও গ্লিসারিনের অনুপাত হবে 2 : 3?

সমাধান ঃ মনে করি মিশ্রণটিকে জল ও গ্লিসারিনের পরিমাণ x সি.সি. ও $3x$ সি.সি.।

প্রশ্নানুসারে, $x + 3x = 240$ সি.সি. ;

$\therefore x = 60$ সি.সি.,বা, জলের পরিমাণ 60 সি.সি. ও গ্লিসারিনের পরিমাণ 180 সি.সি.। ধরি, আরও y সি.সি. জল মেশালে জল ও গ্লিসারিনের অনুপাত হবে 2 : 3।

সুতরাং, $60 + y : 180 = 2 : 3$

বা, $\frac{60+y}{180} = \frac{2}{3}$

বা, $180 + 3y = 360$

বা, $3y = 180$

$\therefore y = 60$

অতএব, আরও 60 সি.সি.জল মেশালে জল ও গ্লিসারিনের অনুপাত হবে 2 : 3। **[উত্তর]**

উদাহরণ 19. দু'টি সম আয়তনের পাত্রে অ্যাসিড ও জল 2 : 3 এবং 5 : 4 অনুপাতে আছে। যদি পাত্র দুটির মিশ্রকে একসাথে মিশ্রিত করা হয় তবে নূতন মিশ্রণে অ্যাসিড ও জলের অনুপাত কী হবে?

সমাধান ঃ প্রথম পাত্রে অ্যাসিড ও জলের পরিমাণ হল, $\frac{2}{5}$ ভাগ ও $\frac{3}{5}$ ভাগ।

দ্বিতীয় পাত্রে অ্যাসিড ও জলের পরিমাণ হল, $\frac{5}{9}$ ভাগ ও $\frac{4}{9}$ ভাগ।

অতএব দুইটি পাত্রের মিশ্রণে মোট অ্যাসিড ও জলের পরিমাণ হল,

$\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{9}\right)$ ভাগ ও $\left(\frac{3}{9}+\frac{4}{9}\right)$ ভাগ

বা, $\frac{43}{45}$ ভাগ ও $\frac{47}{45}$ ভাগ।

$\therefore$ দুটি পাত্রের মিশ্রণ একসঙ্গো মেশালে অ্যাসিড ও জলের অনুপাত হবে 43 : 47 **[উত্তর]**।

উদাহরণ 20. দুই প্রকার চা-এর নমুনাতে দার্জিলিং এবং আসাম চা-এর ওজনের অনুপাত যথাক্রমে 2 : 3 এবং 5 : 3। এই দুই প্রকার চা-এর নমুনা থেকে 3 : 4 ওজনের অনুপাতে নিয়ে মিশ্রিত করা হল। চূড়ান্ত মিশ্রণে দার্জিলিং ও আসাম চা-এর অনুপাত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রথম প্রকার চা-এর নমুনাতে দার্জিলিং এবং আসাম চা-এর ওজনের পরিমাণ $\frac{2}{5}$ ভাগ এবং $\frac{3}{5}$ ভাগ। দ্বিতীয় প্রকার চা-এর নমুনাতে দার্জিলিং এবং আসাম চায়ের ওজনের পরিমাণ যথাক্রমে $\frac{5}{8}$ ভাগ এবং $\frac{3}{8}$ ভাগ। এই দুই প্রকার চা-এর নমুনা থেকে 3 : 4 ওজনের অনুপাত নিয়ে মিশ্রিত করা হলে চূড়ান্ত মিশ্রণে দুই প্রকার চায়ের ওজনের পরিমাণ যথাক্রমে $\frac{3}{7}$ ভাগ ও $\frac{4}{7}$ ভাগ। সুতরাং চূড়ান্ত

মিশ্রণে দার্জিলিং ও আসাম চা-এর ওজনের পরিমাণ যথাক্রমে $\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\right)$ ভাগ এবং $\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}\right)$ ভাগ অর্থাৎ $\left(\frac{6}{35}+\frac{4}{14}\right)$ ভাগ এবং $\left(\frac{9}{35}+\frac{3}{14}\right)$ ভাগ।

$\therefore$ চূড়ান্ত মিশ্রণে দার্জিলিং ও আসাম চা-এর ওজনের অনুপাত $\left(\frac{37}{40}:\frac{33}{70}\right)=37:33$ **[উত্তর]**।

উদাহরণ 21. যদি 50 জল লোক প্রতিদিন 16 ঘণ্টা কাজ ক'রে 40 দিনে 1200 টাকা উপার্জন করে, তবে 150 জন লোক প্রতিদিন 20 ঘণ্টা কাজ ক'রে 24 দিনে কত টাকা উপার্জন করবে?

সমাধান ঃ মনে করি নির্ণেয় উপার্জন x টাকা।

এখানে বিভিন্ন অনুপাতগুলি হল ঃ

লোকসংখ্যা	দৈনিক কত ঘণ্টা কাজ করে	কাজের দিনের সংখ্যা	মোট উপার্জন
50	16	40	1200
150	20	24	x

এখন যেহেতু,

(১) **লোকের সংখ্যা বেড়ে গেছে**। সুতরাং, উপার্জন বেড়ে যাবে। তাই অর্জিত উপার্জন 1200 কে গুরু অনুপাত $\frac{150}{50}$ দিয়ে গুণ করতে হবে।

(২) **দিনের সংখ্যা কমে যাওয়ার উপার্জন কমে যাবে**। তাই অর্জিত উপার্জন 1200 কে লঘু অনুপাত $\frac{24}{40}$ দিয়ে গুণ করতে হবে।

(৩) **ঘন্টার সংখ্যার বেড়ে গেছে বলে উপার্জনও বেড়ে যাবে**। তাই অর্জিত উপার্জন 1200 কে গুরু অনুপাত $\frac{20}{16}$ দিয়ে গুণ করতে হবে।

অতএব, গুণনীয় অনুপাতগুলি যথাক্রমে হবে, $\frac{150}{50},\frac{20}{16},\frac{24}{40}$

$\therefore\ x=\left(1200\times\frac{150}{50}\times\frac{20}{16}\times\frac{24}{40}\right)$ টাকা

$=2700$ টাকা **[উত্তর]**।

উদাহরণ 22. 35 কেজি জলমিশ্রিত দুধে দুধ ও জলের অনুপাত 5 : 2। এই মিশ্রণে কি পরিমাণ জল মিশ্রিত করলে দুধ ও জলের অনুপাত 2 : 1 হবে?

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে 35 কেজি মিশ্রণে দুধের পরিমাণ হল $\frac{5 \times 35}{7} = 25$ কেজি। জলের পরিমাণ হল $\frac{2 \times 35}{7} = 10$ কেজি।

এখন মনে করি এই মিশ্রণে x পরিমাণ জল মেশালে দুধ ও জলের অনুপাত হবে 2 : 1।

$$\frac{25 + x}{10 + x} = \frac{2}{1}$$

$\therefore x = 5$

সুতরাং 5 কেজি জল মেশালে দুধ ও জলের অনুপাত 2 : 1 হবে [**উত্তর**]।

উদাহরণ 23. একটি স্কুলের মোট ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 660 এবং ছাত্র-ছাত্রীর অনুপাত 13 : 9। কিছুদিন পরে 30 জন ছাত্রী স্কুলে যোগ দেয় এবং কিছু ছাত্র স্কুল পরিত্যাগ করে। ফলে ছাত্র-ছাত্রীর অনুপাত দাঁড়ায় 6 : 5। কতজন ছাত্র স্কুল পরিত্যাগ করেছিল তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ স্কুলের ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত 13 : 9।

মনে করি, ছাত্র ও ছাত্রীর সংখ্যা যথাক্রমে 13x ও 9x

অতএব, মোট ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 13x + 9x = 22x।

প্রশ্নানুসারে, 22x = 660

$\therefore x = 30$

অতএব, ঐ স্কুলের ছাত্রের সংখ্যা 13 × 13 = 390 ও

ছাত্রীর সংখ্যা 9 × 30 = 270।

আরও 30 জন ছাত্রী স্কুলে যোগ দিলে মোট ছাত্রীর সংখ্যা হবে 270 + 30 = 300।

এখন ধরি y সংখ্যক ছাত্র স্কুল পরিত্যাগ করেছিল। সুতরাং ছাত্রের সংখ্যা হবে 390 – y ও ছাত্রীর সংখ্যা 300।

সুতরাং, $\frac{390 - y}{300} = \frac{6}{5}$

বা, y = 30

সুতরাং, 30 জন ছাত্র স্কুল পরিত্যাগ করেছিল **(উত্তর)**।

উদাহরণ 24. দুজন শ্রমিকের দৈনিক মজুরীর অনুপাত 4 : 3 এবং তাদের একজন অপরজনের থেকে 9 টাকা বেশি পায়। তাদের প্রত্যেকের দৈনিক মজুরী কত?

সমাধান ঃ মনে করি, দুজন শ্রমিকের মজুরী যথাক্রমে 4x টাকা ও 3x টাকা।

প্রশ্নানুসারে, $4x - 3x = 9$ বা $x = 9$

অতএব, $\left.\begin{array}{l}\text{প্রথম শ্রমিকের মজুরী } 4 \times 9 = 36 \text{ টাকা} \\ \text{দ্বিতীয় শ্রমিকের মজুরী } 3 \times 9 = 27 \text{ টাকা}\end{array}\right\}$ (উত্তর)

উদাহরণ 25. একটি কারখানায় শ্রমিকদের বেতন 22 : 25 হারে বৃদ্ধি পেল কিন্তু শ্রমিকদের সংখ্যা 15 : 11 হারে কমিয়ে দেওয়া হ'ল। এই বৃদ্ধি ও হ্রাসের ফলে শ্রমিকদের বেতন কি অনুপাতে বৃদ্ধি বা হ্রাসপ্রাপ্ত হল তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রশ্ন থেকে এটা স্পষ্ট যে, আগে একজন শ্রমিকের বেতন 22 টাকা হলে বর্তমানে একজন শ্রমিকের বেতন বেড়ে 25 টাকা হবে। আবার, আগে কারখানার শ্রমিকের সংখ্যা 15 জন হলে বর্তমানে তা কমে গিয়ে 11 জন হবে।

সুতরাং, আগে শ্রমিকদের মোট বেতন ছিল (22×15) টাকা বা 330 টাকা এবং বর্তমানে সেই বেতন কমে গিয়ে (25×11) টাকা বা 275 টাকা হয়েছে।

সুতরাং, আগে মোট বেতন বাবদ টাকার চেয়ে বর্তমানের মোট বেতন বাবদ টাকা কম বলে তা 330 : 275 বা 6 : 5 অনুপাতে হ্রাস পেয়েছে।

উদাহরণ 26. কোন কারখানার উৎপাদিত সামগ্রী সমূহের উৎপাদন ব্যয়ের মান, কাঁচামাল বাবদ ব্যয়, মজুরী বাবদ ব্যয় ও কারখানার উপরিব্যয়ের সমষ্টির সমান। উক্ত তিনটি খাতে বাবদ ব্যয়ের অনুপাত 15 : 6 : 5 পরবর্তীকালে কাঁচামাল বাবদ ব্যয় 10 : 9 অনুপাতে হ্রাস পায় এবং মজুরী বাবদ ব্যয় 2 : 3 অনুপাতে বৃদ্ধি পায়। যদি কারখানার উৎপাদন ব্যয়ের মান অপরির্তিত রাখতে হয় তা হলে কারখানার উপরিব্যয় কি অনুপাতে পরিবর্তিত করতে হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, কাঁচামালের উৎপাদন, মজুরী বাবদ ব্যয় ও উপরি ব্যয়ের পরিমাণ :$15x$, $6x$ ও $5x$;

$\therefore$ মোট ব্যয়ের পরিমাণ $= 26x$;

এখন, কাঁচামালের উৎপাদন ব্যয় 10 : 9 অনুপাতে হ্রাস পেলে বর্তমান ব্যয় হবে ঃ $\frac{9\times15x}{10} = \frac{27x}{2}$ ।

আবার, মজুরীবাবদ ব্যয় 2 : 3 অনুপাতে বেড়ে গেলে বর্তমান ব্যয় হবে, $\frac{3\times6x}{2} = 9x$ ।

এর ফলে বর্তমানে কাঁচামাল ও মজুরীবাবদ উৎপাদন ব্যয়ের মোট সমষ্টি হবে $\frac{27x}{2} + 9x = \frac{45x}{2}$

এখন, আগের মোট ব্যয় $= 26x$

এখন, মোট ব্যয় $= \frac{25}{2}x$

$\therefore$ পার্থক্য $=26x-\frac{25}{2}x = \frac{7x}{2}$

অতএব, মোট ব্যয় অপরিবর্তিত রাখতে হলে,

উপরিব্যয়ের অনুপাত $5x : \frac{7x}{2}$ অথবা $10x : 7x$ বা $10 : 7$ হারে কমাতে হবে **[উত্তর]**।

উদাহরণ 27. A, B ও C যথাক্রমে 45,000 টাকা, 50,000 টাকা ও 5,500 টাকা মূলধন নিয়ে একটি অংশীদারী ব্যবসায় যোগ দিল। A ম্যানেজার হিসাবে লাভের 10 শতাংশ পাবে এবং লাভের অবশিষ্ট টাকা এরা মূলধন বিনিয়োগের অনুপাতে ভাগ পাবে। মোট লাভ 1,00,000 টাকা হলে A, B ও C প্রত্যেকে কত টাকা পাবে?

সমাধান ঃ ম্যানেজার হিসাবে A পাবে = 10% বা $\frac{10\times100000}{100} = 10000$ টাকা।

$\therefore$ বণ্টনযোগ্য লাভ $= (100000 - 1000)$ টাকা বা 90000 টাকা।

মনে করি, বণ্টনযোগ্য লাভ থেকে A, B ও C-এর প্রাপ্য অংশ x, y ও z টাকা।

শর্তানুযায়ী, $x + y + z = 90000$.................(i)

এবং $\frac{x}{45000} = \frac{y}{50000} = \frac{z}{55000}$

বা $\frac{x}{9} = \frac{y}{10} = \frac{z}{11} = k$ (ধরি), $k \neq 0$

$\therefore x = 9k$

$y = 10k$

$z = 11k$

$\therefore$ (1) থেকে পাই ঃ

$9k + 10k + 11k = 90000$, বা, $30k = 90000$, বা, $k = 3000$

$\therefore x = 9k = 9 \times 3000 = 27000$ টাকা

$y = 10k = 10 \times 3000 = 30000$ টাকা

$z = 11k = 11 \times 3000 = 33000$ টাকা

$\therefore$ A-এর অংশ = 27000 টাকা + 10000 = 37000 টাকা

B-এর অংশ = 30000 টাকা।

C-এর অংশ = 33000 টাকা

[উত্তর]

১(ক).৯ সমানুপাত কাকে বলে

চারটি প্রদত্ত রাশি বা পদ যদি এমন হয় যে, প্রথম দু'টি পদ-এর অনুপাত এবং শেষের দু'টি পদ-এর অনুপাত পরস্পর সমান হয় তবে পদ চারটিকে বলা হবে সমানুপাতী (Proportional)।

উদাহরণ হিসাবে বলা যায় 3 টাকা ও 9 টাকার অনুপাত এবং 7 লিটার ও 21 লিটার-এর অনুপাত পরস্পর সমান, কারণ 3 টাকা : 9 টাকা = 3 : 9 বা 1 : 3 এবং 7 লিটার : 21 লিটার = 7 : 21 বা 1 : 3। সুতরাং, 3 টাকা ও 9 টাকা এবং 7 লিটার ও 21 লিটার সমানুপাতী। এই সমানুপাতটি যেভাবে লিখতে হবে তা হল ঃ 3 : 9 = 7 : 21 অথবা 3 : 9 :: 7 : 21।

অন্য একটি উদাহরণ ঃ a : b = c : d হল একটি সমানুপাত। অর্থাৎ, a, b ও c, d সমানুপাতী বা a : b :: c : d।

কোন সমানুপাত-এর (i) প্রথম ও চতুর্থ পদ-কে (উপরের উদাহরণে a ও d) বলা হয় **প্রান্তীয় পদ** বা **প্রান্তীয় রাশি** (Extremes), (ii) দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ-কে (b ও c) বলা হয় **মধ্যক পদ** বা **মধ্যক রাশি** (Means) এবং (iii) চতুর্থ পদ-কে (d) প্রথম তিনটি পদ-এর (a, b, c) **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth Propotional) বলা হয়।

১(ক).১০ সমানুপাতের বিভিন্ন প্রক্রিয়া

(১) **ব্যস্ত প্রক্রিয়া বা ব্যস্ত অনুপাত [Invertendo] :**

$a : b = c : d$ হলে $b : a = d : c$ **[ব্যস্ত প্রক্রিয়া বা ব্যস্ত অনুপাত (Invertendo)]**

বা, a, b, c, d যদি সমানুপাতী হয় অর্থাৎ, $a : b = c : d$

তবে, $b : a = d : c$

(২) **একান্তর প্রক্রিয়া [Alternendo] :**

$a : b = c : d$ হলে, $a : c = b : d$ **একান্তর প্রক্রিয়া [Alternendo]**

প্রমাণ ঃ এখনে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\therefore \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ অতএব $a : c = b : d$

(৩) **যোগ প্রক্রিয়া [Componendo] :**

$a : b = c : d$ হলে $a + b : b = c + d : d$ **যোগ প্রক্রিয়া [Componendo]**

প্রমাণ ঃ এখানে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\therefore \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$; বা $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

বা, $a + b : b = c + d : d$

(৪) ভাগ প্রক্রিয়া **[Dividendo] :**

$a : b = c : d$ হলে $a - b : b = c - d : d$ ভাগ প্রক্রিয়া **[Dividendo]**

প্রমাণ ঃ এখানে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

বা, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ বা, $a - b : b = c - d : d$

(৫) **পরিবর্তন প্রক্রিয়া ঃ**

$a : b = c : d$ হলে $a : a - b = c : c - d$ **[পরিবর্তন প্রক্রিয়া]**

(৬) যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া **[Componendo-Dividendo] :**

$a : b = c : d$ হলে $a + b : a - b = c + d : c - d$

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া **[Componendo-Dividendo] :**

প্রমাণ ঃ এখানে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ সুতরাং $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ বা $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ....(i)

$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ বা $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ....(ii)

সুতরাং, (i) ও (ii) থেকে পাওয়া যাবে ঃ

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$\therefore a + b : a - b = c + d : c - d$

বি. দ্র. $a : b = c : d = e : f$ হলে, যে-কোন অনুপাত

$= (a + c + e) : (b + d + f)$ -এর সমান হবে।

প্রমাণ ঃ এখানে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ (ধরা যাক)

$\therefore a = bk$

$c = dk$

$e = fk$

এখন, $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{bk+dk+ek}{b+d+f} = k$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$\therefore a : b = c : d = e : f = (a + c + e) : (b + d + f)$

অন্যভাবে প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $a : b = c : d = e : f \quad \therefore ad = bc$ এবং $af = be$

উভয়পক্ষে ab যোগ করে পাই ঃ $ad + af + ab = bc + be + cb$

বা, $a(d + f + b) = b(c + e + a)$

বা, $a : b = (a + c + e) : (b + d + f)$

১(ক).১১ ক্রমিক সমানুপাত [Continued Proportion]

সমজাতীয় কয়েকটি রাশিকে বলা হবে ক্রমিক সমানুপাতী যদি ঃ

প্রথম রাশি : দ্বিতীয় রাশি = দ্বিতীয় রাশি : তৃতীয় রাশি = তৃতীয় রাশি : চতুর্থ রাশি ইত্যাদি এ ধরনের সম্পর্ক সিদ্ধ হয়।

যদি a, b, c, d......ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তবে,

$a : b : c : d.... = a : b = b : c = c : d...$ বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ .... হবে।

যদি তিনটি রাশি a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হয় তবে

$a : b = b : c$ বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ বা, $ac = b^2$ হবে।

উদাহরণ হিসাবে বলা যায় ঃ 3, 9, 27 ক্রমিক সমানুপাতী কারণ

$$\left.\begin{array}{l} 3 : 9 = 1 : 3 \text{ এবং} \\ 9 : 27 = 1 : 3 \end{array}\right\} \text{ এখানে প্রতিটি অনুপাত } \frac{1}{3}\text{-এর সমান।}$$

অর্থাৎ, 3 : 9 = 9 : 27। এ-ক্ষেত্রে, 9-কে 3 ও 27-এর **মধ্যসমানুপাতী** (Mean Proportional) এবং 27-কে 3 ও 9-এর **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third Proportional) বলা হবে।

১(ক).১২ উদাহরণমালা

উদাহরণ ঃ 1. 6, 11, 18-এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করুন।

মনে করি চতুর্থ সমানুপাতী = x

সমাধান ঃ সুতরাং, 6 : 11=18 : x,

বা, $\frac{6}{11} = \frac{18}{x}$

বা, $6x = 198$

$\therefore x = 33$

সুতরাং চতুর্থ সমানুপাতী হ'ল 33 **[উত্তর]**।

উদাহরণ ঃ 2. 2, 7, 9, 13, 16 প্রত্যেক সংখ্যার সঙ্গে কোন সংখ্যা যোগ করলে নূতন সংখ্যাগুলি সমানুপাতী হবে?

সমাধান ঃ মনে করি x নির্ণেয় সংখ্যা।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{7+x}{9+x}=\frac{13+x}{16+x}$ বা, $x = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা হ'ল 5 **[উত্তর]**।

উদাহরণ ঃ 3. যদি $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}$ হয় দেখান যে, $\frac{a+b+c}{c}=2$।

সমাধান ঃ আমরা জানি, $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}=\frac{a+b+c}{3+4+7}$

$\therefore$ $\frac{c}{7}=\frac{a+b+c}{14}$ বা $\frac{a+b+c}{c}=2$ **[উত্তর]**।

উদাহরণ ঃ 4. $a + b : \sqrt{ab} = 4 : 1$ হলে, দেখান যে, $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=4$

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=4$ বা, $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=4$ **[উত্তর]**।

উদাহরণ ঃ 5. যদি 2, x, 18 সমানুপাতী হয়, তবে x-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ 2, x, 18 সমানুপাতে রয়েছে।

$\therefore 2 : x = x : 18$

বা, $\frac{2}{x}=\frac{x}{18}$

বা, $x^2 = 36$

$\therefore x = \pm 6$ **[উত্তর]**। [**ব্যাখ্যা ঃ** $x = +6$ হলেও $(+6)^2 = 36$
$x = -6$ হলেও $(-6)^2 = 36$]

উদাহরণ ঃ 6. যদি $a : b : c = 3 : 4 : 5$ এবং $a + b + c = 288$ হয়, তবে a, b ও c-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $a : b : c = 3 : 4 : 5$

$\therefore$ $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k$ (মনে করি) $\therefore$ $a = 3k,\ b = 4k,\ c = 5k$

$\therefore\ a + b + c = 3k + 4k + 5k = 12k\ \therefore\ 12k = 228$; বা, $k = 24$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ a &= 3 \times 24 = 72\\ b &= 4 \times 24 = 96\\ c &= 5 \times 24 = 120\end{aligned}\right\}$$ [উত্তর]।

উদাহরণ 7. $A : B = 2 : 3$; $B : C = 3 : 4$; $C : D = 2 : 5$; হলে $A : B : C : D$ কত?

সমাধান ঃ $A : B = 2 : 3$; আবার $B : C = 3 : 4$

অতএব, $A : B : C = 2 : 3 : 4$

$C : D = 2 : 5 = 2 \times 2 : 5 \times 2$ [উভয় পদকে 2 দিয়ে গুণ করে c পদকে 4-এর সমান করার জন্য]

বা, $C : D = 4 : 10$

অতএব, $A : B : C : D = 2 : 3 : 4 : 10$ **[উত্তর]**।

উদাহরণ ঃ 8. যদি $\dfrac{x}{y+z} = \dfrac{y}{z+x} = \dfrac{z}{x+y}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x + y + z = 0$ বা প্রতি অনুপাত $= \dfrac{1}{2}$

সমাধান ঃ মনে করি, $\dfrac{x}{y+z} = \dfrac{y}{z+x} = \dfrac{z}{x+y} = k$

$\therefore\ x = k\ (y + z),\ y = k(z + x),\ z = k(x + y)$

$\therefore\ (x + y + z),\ = 2k(x + y + z)$

বা, $(2k-1)(x + y + z)=0$

$\therefore$ হয় $2k - 1 = 0$ বা, $k = \dfrac{1}{2}$

নতুবা $x + y + z = 0$

উদাহরণ ঃ 9. 253-কে এমন চারটি অংশে বিভক্ত করুন যাতে এগুলি 2, 5, 7, 9-এর সমানুপাতী হয়।

সমাধান ঃ মনে করি, $a : b : c : d = 2 : 5 : 7 : 9$ এবং প্রশ্নানুসারে $a + b + c + d = 253$।

এখন, $a : b : c : d = 2 : 5 : 7 : 9$

সুতরাং $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{7} = \dfrac{d}{9} = k$ (ধরি)

অর্থাৎ, $a = 2k$

$b = 5k$

$c = 7k$

$d = 9k$

বা, $a + b + c + d = 23k = 253$

$\therefore\ k = 11$

অতএব, $\left.\begin{aligned} a &= 2 \times 11 = 22 \\ b &= 5 \times 11 = 55 \\ c &= 7 \times 11 = 77 \\ d &= 9 \times 11 = 99 \end{aligned}\right\}$ [উত্তর]।

বিকল্পভাবে ঃ মনে করি, $a : b : c : d = 2 : 5 : 7 : 9$ এবং প্রশ্নানুসারে $a + b + c + d = 253$.....(1)

এখন, (i) $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ বা, $a = \frac{2}{5}b$

(ii) $\frac{c}{b} = \frac{7}{5}$ বা, $b = \frac{5}{7}c$

(iii) $\frac{c}{d} = \frac{7}{9}$ বা, $c = \frac{7}{9}d$

সুতরাং $a = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{9}d = \frac{2}{9}d \quad \left[\because a = \frac{2}{5}b = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7}c = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{9}d\right]$

$b = \frac{5}{7} \times \frac{7}{9}d = \frac{5}{9}d$

$c = \frac{7}{9}d$

(1) এ a, b, c-এর মান বসাইয়া পাই $\frac{2}{9}d + \frac{5}{9}d + \frac{7}{9}d + d$

বা, $\frac{23d}{9} = 23$

$\therefore\ d = \frac{253 \times 9}{23} = 99$

নির্ণেয় অংশগুলি হ'ল ঃ $a = \frac{2}{9} \times 99 = 22$

$b = \frac{5}{9} \times 99 = 55$

$$c = \frac{7}{9} \times 99 = 77$$

$$d = 99$$

উদাহরণ ঃ 10. যদি 4টি ঘোড়ার মূল্য 6 টি গরুর মূল্যের সমান হয়, 3টি গরুর মূল্য 20টি ভেড়ার মূল্যের সমান হয় এবং 10টি ভেড়ার মূল্য 16টি মেষশাবকের মূল্যের সমান হয়, তবে 1টি মেষশাবকের মূল্য 40 টাকা হলে 1টি ঘোড়ার মূল্য কত হবে?

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে, ঘোড়া ও গরুর মূল্যের অনুপাত 4 : 6,

গরু ও ভেড়ার মূল্যের অনুপাত 3 : 20 বা 6 : 40,

ভেড়া ও মেষশাবকের মূল্যের অনুপাত 10 : 16 বা 40 : 64

সুতরাং ঘোড়া, গরু, মেষ ও মেষশাবকের মূল্যের অনুপাত হবে 4 : 6 : 40 : 64

অর্থাৎ, ঘোড়া ও মেশশাবকের মূল্যের অনুপাত 4 : 46 বা 1 : 16

সুতরাং, 1টি মেষশাবকের মূল্য 40 টাকা হলে 1টি ঘোড়ার মূল্য হবে 40 × 16 = 640 টাকা **[উত্তর]**।

উদাহরণ ঃ 11. একটি হীরকখণ্ডের মূল্য এর ওজনের বর্গের সমানুপাতী। ঐ হীরকখণ্ড ভেঙ্গে চার টুকরো হ'ল এবং টুকরোগুলির ওজনের অনুপাত 1 : 3 : 5 : 6। যদি এর ফলে হীরকখণ্ডটির মূল্য বাবদ 58,000 টাকা ক্ষতি হয় তবে অভগ্ন হীরকখণ্ডের মূল্য নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, (১) চার টুকরো হীরকখণ্ডের ওজন যথাক্রমে W, $3W$, $5W$ ও $6W$।

$\therefore$ অভগ্ন হীরকখণ্ডের মোট ওজন $= 15W$

(২) টুকরো চারটি ও অভগ্ন হীরকখণ্ডের মূল্য যথাক্রমে P_1, P_3, P_5, P_6 এবং P।

প্রশ্নানুযায়ী, $$\frac{P_1}{W^2} = \frac{P_3}{(3W)^2} = \frac{P_5}{(5W)^2} = \frac{P_6}{(6W)^2} = \frac{P}{(15W)^2}$$

$$\therefore P_1 \frac{P}{225}\left[\because \frac{P_1}{W^2} = \frac{P}{(15W)^2} \quad \frac{P_1}{W^2} = \frac{P}{225W^2} \quad P_1 \times 225W^2 = P \times W^2 \therefore P_1 = \frac{P}{225}\right]$$

$$P_3 = \frac{9P}{225};\ P_5 = \frac{25P}{225};\ P_6 = \frac{36P}{225}$$

$\therefore$ চার টুকরো হীরকের মোট মূল্য $= P_1 + P_3 + P_5 + P_6$

$$= \frac{P}{225} + \frac{9P}{225} + \frac{25P}{225} + \frac{36P}{225} = \frac{71P}{225}$$

$\therefore$ ক্ষতির পরিমাণ $P-\frac{71P}{225}=\frac{154P}{225}$

এখন, প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $\frac{154P}{225}=58,000 \quad \therefore P=\frac{225}{154}\times 58,000=84,740$

অতএব, অভগ্ন হীরকখণ্ডের মূল্য $=84,740$ টাকা **[উত্তর]**।

১(ক).১৩ অনুশীলনী

1. অনুপাত বলতে কী বোঝেন?
2. সমানুপাত বলতে কী বোঝেন?
3. অনুপাত ও সমানুপাত—এই দুয়ের মধ্যে মূল পার্থক্য কী?
4. নিম্নলিখিত প্রশ্নাবলীর সমাধান করুন :

   (i) যদি $x : y = 3 : 4$ হয়, তবে $(7x - 4y) : (3x + y)$-এর মান নির্ণয় করুন। **[উত্তর ঃ 5:13]**

   (ii) যদি $(10a + 3b) : (5a + 2b) = 9 : 5$ হয়, তবে a ও b-এর অনুপাত নির্ণয় করুন।

   [উত্তর ঃ 5:3]

   (iii) যদি $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}$ হয়, তবে দেখান যে $\frac{a+b+c}{c}=2$।

   (iv) $a+b : \sqrt{ab}=4:1$ হলে দেখান যে $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=4$।

   (v) $\frac{ax+by}{cz}=\frac{cz+ax}{b}=\frac{bz+cy}{ax}=x+y+z$

   সংকেত $a=yb=zc=\frac{2abc}{bc+ca+ab}$ বা, $xa+yb+zc=0,\ x+y+z=-1$

5. যদি $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx+az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ হয়

   প্রমাণ করুন যে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

6. $(5 + x)$ এবং $(37 + x)$-এর অনুপাত 1 এবং 3-এর অনুপাতের সমান হলে x-এর মান নির্ণয় করুন। **[উত্তর ঃ 11]**

7. যদি $a : b : c = 2 : 3 : 4$ এবং $a + b + c = 99$ হয় তবে a, b ও c-এর মান নির্ণয় করুন।

[**উত্তর ঃ** $a = 22$, $b = 33$, $c = 44$]

8. যদি 2, x, 18 ক্রমিক অনুপাতে থাকে তবে x-এর মান নির্ণয় করুন। [**উত্তর ঃ** ± 6]

9. 4 ও 12-এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করুন। [**উত্তর ঃ** 36]

10. 5, 11 এবং 15-এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করুন। [**উত্তর ঃ** 33]

11. একটি সমানুপাতের শেষ তিনটি পদ 4, 6, 8 প্রথম পদটি নির্ণয় করুন। [**উত্তর ঃ** 3]

12. 6, 11, 18-এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করুন। [**উত্তর ঃ** 33]

13. এরূপ চারটি সমানুপাতী সংখ্যা নির্ণয় করুন যেন এদের প্রান্তীয় রাশি দুটির যোগফল 21, মধ্যম রাশি দুটির যোগফল 19 এবং সব রাশিগুলির বর্গের সমষ্টি 442 হয়। [**উত্তর ঃ** 6, 9, 10, 15]

14. একটি পাথরের মূল্য এর ওজনের বর্গের সমানুপাতী। পাথরটি ভেঙ্গে চারখণ্ড হ'ল এবং এগুলির ওজনের অনুপাত দাড়ায় 1 : 2 : 3 : 4। যদি এর ফলে 70,000 টাকা ক্ষতি হয়, তবে পাথরটির মূল্য নির্ণয় করুন। [**উত্তর ঃ** 1,00,000 টাকা]

15. কোন এক বছর রেলভাড়া 14 : 25 অনুপাতে বৃদ্ধি পাওয়ায় যাত্রীসংখ্যা 15 : 7 অনুপাতে হ্রাস পায়। এর ফলে রেল কোম্পানীর মোট আয় কি অনুপাতে বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে তা নির্ণয় করুন।

[**উত্তর ঃ** 6 : 5]

16. দৈনিক 8 ঘণ্টা চালু রেখে যদি 15 টি পাম্প 24 দিন 3000 টন জল তুলতে পারে, তবে কতদিনে প্রতিদিন 10 ঘণ্টা চালু রেখে 20 টি পাম্প 4000 টন জল তুলতে পারবে? [**উত্তর ঃ** 18 দিন]

17. 1999 খ্রীষ্টাব্দের বিশ্বকাপ ক্রিকেটের দুই ইনিংসে তেণ্ডুলকর, সৌরভ ও আজাহার মোট 437 রান করেছিল। যদি তেণ্ডুলকর ও সৌরভ এবং সৌরভ ও আজাহারের দুই ইনিংসে মোট রানের অনুপাত 2 : 3 হয়, তবে কে কত রান করেছিল তা নির্ণয় করুন। [**উত্তর ঃ** 92,138,207]

18. দুটি পাত্রে গ্লিসারিন ও জলের মিশ্রণের অনুপাত যথাক্রমে 4 : 3 এবং 3 : 4। পাত্র দু'টির মিশ্রণ কী অনুপাতে মিশ্রিত করলে চূড়ান্ত মিশ্রণে গ্লিসারিন ও জলের পরিমাণ সমান হবে? [**উত্তর ঃ** 1 : 1]

19. দু'জন শ্রমিকের দৈনিক মজুরীর অনুপাত 4 : 3 এবং এদের একজন অপরজন থেকে 9 টাকা বেশি পায়। এদের প্রত্যেকের দৈনিক মজুরী কত? [**উত্তর ঃ** 36 টা., 27 টা.,]

20. দুই ব্যক্তির মাসিক বেতনের অনুপাত 3 : 5। যদি প্রত্যেকের মাসিক বেতন বৃদ্ধি 20 টাকা হয়, তবে অনুপাত হয় 13 : 21 ব্যক্তিদ্বয়ের বেতন নির্ণয় করুন। [**উত্তর** ঃ 240 টাকা, 400 টাকা]

21. 60 কেজি মিশ্রণে দুধ ও জলের অনুপাত 5 : 11 কি পরিমাণ জল মিশ্রণ করলে দুধ ও জলের অনুপাত 3 : 1 হবে? [**উত্তর** ঃ 10 কেজি]

22. দুই ব্যক্তির মাসিক আয়ের অনুপাত 3 : 4 এবং মাসিক ব্যায়ের অনুপাত 11 : 15। তারা প্রতি মাসে 100 টাকা সঞ্চয় করে। তাদের মাসিক আয় কত? [**উত্তর** ঃ 1200 টাকা ও 1600 টাকা]

23. 6 বছর আগে শঙ্কর ও শাহ্‌রুক-এর বয়সের অনুপাত ছিল 5 : 6। 6 বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত হবে 7 : 8 তাদের বর্তমান বয়সের অনুপাত কত? [**উত্তর** ঃ 6 : 7]

24. দুই ভাই-এর বর্তমান বয়স 5 ও 8 বৎসর। কত বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত 3 : 4 হবে? [C.U.B.Com 1990] [**উত্তর** ঃ 4 বৎসর পরে]

25. দুই ব্যক্তির মাসিক বেতনের অনুপাত 8 : 9 এবং তাদের মাসিক ব্যয়ের অনুপাত 13 : 15 এবং যদি প্রত্যেকের সঞ্চয় 150 টাকা হয়, তবে তাদের বেতন নির্ণয় করুন।

[**উত্তর** ঃ 800 টাকা ও 900 টাকা]

26. যদি 30 জন লোক প্রত্যহ 8 ঘণ্টা কাজ ক'রে 20 দিনে 640 টাকা আয় করে, তবে প্রতিদিন 10 ঘণ্টা কাজ করে 45 জন লোক 24 দিনে কত আয় করবে? [**উত্তর** ঃ 1440 টাকা]

27. দু'জন ব্যক্তির মাসিক আয়ের অনুপাত 4 : 3 এবং তাদের মাসিক ব্যয়ের অনুপাত 3 : 2। প্রত্যেকে মাসে 500 টাকা সঞ্চয় করলে তাদের মাসিক আয়ের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

[**উত্তর** ঃ প্রথম ব্যক্তির মাসিক আয় 2000 টাকা, দ্বিতীয় ব্যক্তির মাসিক আয় 1500 টাকা।]

28. একটি একদিনের ক্রিকেট টেস্টের দুই ইনিংসে গাভাসকার, বিশ্বনাথ ও মহীন্দর অমরনাথ মোট 475 রান করল। যদি গাভাসকার ও বিশ্বনাথ এবং বিশ্বনাথ ও অমরনাথের মোট রানের অনুপাত 3: 2 হয় তবে কে কত রান করেছিল নির্ণয় কর। [**উত্তর** ঃ গাভাসকার, বিশ্বনাথ ও অমরনাথের প্রত্যেকের দুই ইনিংস-এ মোট রানের সংখ্যা যথাক্রমে 225,150 ও 100]

29. ক, খ, ও গ একত্রে একটি ব্যবসায় আরম্ভ করে। ক ও খ-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং ও গ-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 5। যদি বছরের শেষে 2000 টাকা লাভ হয়, তবে লাভের টাকা কে কত পাবে? [**উত্তর** ঃ লভ্যাংশের অনুপাত হবে 4 : 6 : 15]

30. A, B ও C এই তিন ব্যক্তি একটি ব্যবসায়ে প্রবৃত্ত হল। মূলধন খাতে A 50,000 টাকা, B 30,000 টাকা এবং C 25,000 টাকা বিনিয়োগ করল এই চুক্তিতে যে, মোট লাভের $\frac{4}{25}$ অংশ C ম্যানেজার হিসাবে পাবে এবং লাভের বাকী অংশ প্রত্যেকের মূলধনে নিয়োজিত অর্থের পরিমাণের অনুপাতে বণ্টিত হবে। বৎসরের শেষে মোট লাভের পরিমাণ 30,000 টাকা হলে, প্রত্যেক অংশীদারের পাওনা টাকার পরিমাণ নির্ণয় করুন।

[**উত্তর ঃ** A, B, C প্রত্যেক অংশীদারের পাওনা টাকার পরিমাণ যথাক্রমে 12,000 টাকা, 7,200 টাকা এবং 10,800 টাকা।]

১(ক).১৪ গ্রন্থপঞ্জী

১। ব্যবসায়িক গণিত—ঘোষ ও সাহা।

২। ব্যবসায়িক গণিত—সৌরেন্দ্র নাথ দে।

একক ১(খ) ❑ ভেদ (Variation)

গঠন

১(খ).১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ার পর আপনি সরল ভেদ, ব্যস্ত ভেদ ও যৌগিক ভেদ উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন। ভেদ সম্বন্ধীয় বিভিন্ন বীজগাণিতিক ও সাংখ্যিক প্রশ্নের সমাধান করতে পারবেন।

১(খ).২ ভেদের সংজ্ঞা

দুটি চলরাশি A ও B-এর মধ্যে যদি এরূপ সম্বন্ধ থাকে যে A-র মান পরিবর্তিত হলে B-র মানও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয় তবে বলা হয় A ও B **সরল ভেদে** আছে এবং লেখা হয় $A \infty B$

মনে করি, একটি মোটরগাড়ী সমবেগে ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে যায়। সুতরাং 2 ঘণ্টায় গাড়ীটি 80 কি.মি. যাবে। আবার 30 মি.-এ 20 কি.মি. যাবে। অতএব সময়ের সঙ্গো দূরত্ব সরলভেদে আছে। যদি

x দূরত্ব এবং y সময় হয় তবে $\frac{x}{y}$ = ধ্রুবক হবে।

$= K$, মনে করি। $\therefore\ x = Ky.$

● **ব্যস্ত ভেদ (Inverse Variation) :**

যদি একটি রাশির মানের পরিবর্তন অন্য একটি রাশির অন্যোন্যকের (inverse) মানের পরিবর্তনের সমানুপাতী হয় তবে একটি রাশি অপর রাশির সঙ্গো ব্যস্ত ভেদে আছে বলা হয়। যদি x ও y ব্যস্ত ভেদে থাকে তবে লেখা হয় $x \infty \frac{1}{y}$ অথবা $y \infty \frac{1}{x}$ এক্ষেত্রে x ও $\frac{1}{y}$ সরল ভেদে আছে।

● **যৌগিক ভেদ (Joint Variation) :**

যদি একটি চলরাশি অন্য একাধিক চলরাশির গুণফলের সঙ্গো সরল ভেদে থাকে তবে প্রথম চলরাশি অপর চরলরাশিগুলির সঙ্গো যৌগিক ভেদে আছে বলা হয়।

(i) মনে করি, একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ, h উচ্চতা এবং b ভূমি। সুতরাং $\Delta = \frac{1}{2} \times b.h.$ অর্থাৎ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল তার ভূমি এবং উচ্চতার সঙ্গো যৌগিক ভেদে আছে।

(ii) সরল সুদের পরিমাণ আসল, সময় ও সুদের হারের সঙ্গো যৌগিক ভেদে আছে।

১(খ).৩ যৌগিক ভেদের উপপাদ্য

উপপাদ্য ঃ z -এর মান অপরিবর্তিত রাখলে x যদি y-এর সঙ্গো সরল ভেদে থাকে, এবং y-এর মান অপরিবর্তিত রাখলে যদি x, z-এর সঙ্গো সরল ভেদে থাকে তবে y এবং z উভয়েরই মান পরিবর্তিত হলে yz-এর সঙ্গো x সরলভেদে থাকবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি a_1, b_1, c_1, যথাক্রমে $x, y, z,$-এর মান। পরিবর্তিত হবার পর a_2, b_2, c_2, হল। শর্তানুসারে,

$x \propto y$, যখন z ধ্রুবক.........(i)

$x \propto z$, যখন y ধ্রুবক...... (ii)

প্রমাণ করতে হবে—

(i) -এ z অপরিবর্তিত আছে $(= c_1)$ এবং y, b_1 থেকে b_2 এবং x, a_1 থেকে a_2 হয়েছে। সুতরাং

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{.....(iii)}$$

(ii) থেকে পাই y, b_2 তে স্থির থাকে, z, c_1 থেকে c_2 হয় এবং x, a_2 থেকে a_3 হয়। সুতরাং

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{c_1}{c_2} \text{......(iv)}$$

(iii) ও (iv) থেকে পাই

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} \text{ বা } \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2}$$

সুতরাং $a_1 : a_3 = b_1 c_1 : b_2 c_2$

অর্থাৎ যখন y এবং z উভয়েই পরিবর্তিত হয় তখন $x \propto yz$.

[**বিকল্প প্রমাণ** : $x \propto y$ যখন z ধ্রুবক $\therefore x = ky$, যখন, k, x, y সাপেক্ষে ধ্রুবক। আবার x z যখন y ধ্রুবক।

$\therefore ky \propto z$. যখন y ধ্রুবক! $\therefore k \propto z$. যেহেতু y ধ্রুবক।

$\therefore k = lz$ যেখানে l, k এবং z সাপেক্ষে ধ্রুবক।

$\therefore x, y$ ও z সাপেক্ষে l ধ্রুবক, যেহেতু k, x ও y সাপেক্ষে ধ্রুবক।

সুতরাং $x = ky = (lz).\,y$

$= l\,(yz)$ যেখানে l, x, y ও z সাপেক্ষে ধ্রুবক।

$\therefore x \propto yz$

দ্রষ্টব্য ঃ চলরাশির সংখ্যা সসীম হলে এই উপপাদ্য সিদ্ধ হয়।

নিম্নের ফলগুলি সহজেই প্রমাণ করা যায় ঃ

1) যদি $x \propto y$, $y \propto z$, হয়, তবে $\mathrm{x} + y \propto z$, $\mathrm{x} - y \propto z$, $\sqrt{xy} \propto z$,

2) যদি $x \propto yz$, হয়, তবে $y \propto \dfrac{x}{z}$ এবং $z \propto \dfrac{x}{y}$

3) যদি $x \propto y$, হয়, তবে $x^n \propto y^n$

4) যদি $x \propto y$, এবং $z \propto l$ হয়, তবে $xz \propto yl$ এবং $\dfrac{x}{z} \propto \dfrac{y}{l}$

5) যদি $x \propto yz$, এবং $y \propto zx$ হয়, তবে z ধ্রুবক।

6) যদি $\dfrac{x}{y} \propto x+y$, এবং $\dfrac{y}{x} \propto x-y$ হয়, তবে x^2-y^2 ধ্রুবক।

7) যদি $x \propto y$, z অপরিবর্তিত এবং $x \propto \dfrac{l}{z}$ যখন y অপরিবর্তিত, তবে $\mathrm{x} \propto \dfrac{y}{z}$ যখন y এবং z উভয়ই পরিবর্তিত হয়।

১(খ).৪ উদাহরণমালা

উাহরণ ঃ 1. A, B^2-র সাথে সরল ভেদে আছে এবং $B = 2$ যখন $A = 6$, A ও B-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রশ্নানুযায়ী, $A \propto B^2$ $\therefore A = KB^2$ যেখানে $K =$ ভেদ ধ্রুবক।

এখন, $B = 2$ যখন $A = 6$

$\therefore 6 = K.(2)^2$ বা, $K=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পর্ক $A=\frac{3}{2}B^2$ বা, $2A = 3B^2$

উাহরণ ঃ 2. যদি A, B-র সাথে ব্যস্ত ভেদে থাকে এবং B = 10 হলে, A = 2 হয়, তবে, B = 4 হলে A-র মান কত হবে নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রশ্নানুযায়ী $A \propto \frac{1}{B}$ $\therefore A = \frac{K}{B}$ – (i) যেখানে K = ভেদ ধ্রুবক।

এখন B = 10 হলে, $A = 2$ হয়,

$\therefore 2 = \frac{K}{10}$ বা, K=20 $\qquad \therefore A = \frac{20}{B}$ (i-এ K-র মান বসিয়ে পাই)

আবার, $B = 4$ হলে, $A = \frac{20}{4} = 5$ $\quad \therefore$ নির্ণেয় মান = 5

উাহরণ ঃ 3. x যদি y ও z-এর সাথে যৌগিক ভেদে (Vaies jointly) থাকে এবং $y = \frac{3}{5}$, $z = \frac{10}{27}$ হলে, $x = 2$ হয় তবে, $x = 54$ ও $y = 3$ হলে z-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x \propto yz$ বা $x = kyz$ – (i) (K=ভেদ ধ্রুবক।)

$y = \frac{3}{5}$, $z = \frac{10}{27}$ হলে, $x = 2$ হয়।

$\therefore$ (i) থেকে পাই, $2=K.\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}.\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{9}{\cancel{27}}} = K.\frac{2}{9}$

$$\therefore K = \frac{9.2}{2} = 9$$

$\therefore$ (i) সম্পর্কটি হয়, $x = 9yz$....(ii)

আবার, (ii)-এ $x = 54$ ও $y = 3$ বসিয়ে পাই

$54 = 9.3.z$ বা, $z = \frac{\overset{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{54}}}{\underset{\cancel{3}}{\cancel{9}}} = 2$

$\therefore$ x-র নির্ণেয় মান 2।

উাহরণ ঃ 4. শূন্যস্থান পূর্ণ করুন ঃ

(i) যদি $p^3 \propto q^2$ হয় তবে $q \propto$ ......

(ii) যদি $\sqrt{m} \propto \frac{1}{n}$ হয় তবে $n^2 \propto$ ......

(iii) যদি $n \propto \sqrt[3]{y^2}$ হয় তবে $y \propto$ ....

সমাধান ঃ (i) $p^3 \propto q^2 \; \therefore p^3 = kq^2$ [K=ভেদ ধ্রুবক।]

বা, $q^2 = \frac{P^3}{K}$ বা $q = \sqrt{\frac{P^3}{K}}$ বা, $q = K^1 P^{3/2}$ $\left(\text{যেখানে } \frac{1}{\sqrt{K}} = K^1\right)$

$\therefore q \propto P^{3/2}$ ($\because K^1$ ধ্রুবক)

$\therefore$ শূন্যস্থানে $P^{3/2}$ হবে।

(ii) $\because \sqrt{m} \propto \frac{1}{n} \; \therefore \sqrt{m} \; \frac{K}{n}$ বা, $n = \frac{K}{\sqrt{m}}$

বা, $n^2 = \frac{K^2}{m} = \frac{K^1}{m}$ (যেখানে $K^1 = K^2$)

$\therefore n^2 \propto \frac{1}{m}$ ($\therefore K^1 =$ ধ্রুবক)

$\therefore$ শূন্যস্থানে $\frac{1}{m}$ হবে।

(iii) $\therefore x \propto \sqrt[3]{y^2} \; \therefore x = Ky^{2/3}$ [K = ভেদ ধ্রুবক]

বা $x^3 = K^3 y^2$ (উভয়পক্ষে ঘন করে পাই)

বা $y^2 = \frac{x^3}{K^3}$ বা, $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{K^3}}$

বা $y = K^1\sqrt{x^3}$ $\left[\text{যেখানে } K^1 = \pm\frac{1}{\sqrt{K^3}}\right]$

$\therefore y \propto x^{3/2}$ [$\because K^1 =$ ধ্রুবক]

$\therefore$ শূন্যস্থানে $x^{3/2}$ হবে।

উদাহরণ ঃ 5. $y = a + b$, যেখানে $a \propto x$ এবং $b \propto \frac{1}{x}$; $x = 1$ হলে $y = 11$ এবং $x = 2$ হলে $y = 13$ হবে। $x = 3$ হলে y-র মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = a + b$.....(1)

এখন $a \propto x \therefore a = k_1 x$ ($k_1 =$ ভেদ ধ্রুবক)

$b \propto \frac{1}{x} \quad \therefore b = \frac{k_2}{x}$ ($k_2 =$ ভেদ ধ্রুবক)

$\therefore$ (1)-এ a ও b-র মান বসিয়ে পাই,

$y = k_1 x + \frac{k_2}{x}$.......(2)

এখন $x = 1$, $y = 11$ এবং $x = 2$, $y = 13$ (2)-এ বসিয়ে পাই

$11 = k_1 + k_2$.......(3)

$13 = 2k_1 + \frac{1}{2}k_2$..........(4)

3-কে 2 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$22 = 2k_1 + 2k_2$$

$$-13 = -2k_1 \pm \frac{1}{2}k_2$$

$$9 = \frac{3}{2}k_2 \quad \therefore K_2 = 6$$

$\therefore 14 = 11 - 6 = 5$

(3) ও (4) সমাধান করে পাই $K_1 = 5 : K_2 = 6$

(2)-এ K_1 ও K_2-এ মান বসিয়ে পাই

$y = 5x + 6/x$....(5)

(5) -এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$y = 5 \cdot 3 + \frac{6}{3} = 17$

নির্ণেয় মান $y = 17$

উদাহরণ ঃ 6. যদি $ax + \frac{b}{y} \propto cx + \frac{d}{y}$ হয়, যেখানে a, b, c, d ধ্রুবক, তবে প্রমাণ করুন যে, xy ধ্রুবক।

সমাধান ঃ $ax + \frac{b}{y} \propto cx + \frac{d}{y}$

বা, $ax + \frac{b}{y} = k\left(cx + \frac{d}{y}\right)$ [k = ভেদ ধ্রুবক]

বা, $ax + \frac{b}{y} = kcx + \frac{kd}{y}$

বা, $ax - kcx = \frac{kd}{y} - \frac{b}{y}$

বা, $x(a - kc) = \frac{1}{y}(kd - b)$

বা, $xy = \frac{kd - b}{a - kc}$ = ধ্রুবক (যেহেতু a, b, c, d এবং k ধ্রুবক)

উদাহরণ ঃ 7. দেওয়া আছে যে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল তার ব্যাসার্ধের বর্গের অনুপাতে থাকে। যদি 21 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 1386 বর্গ সেমি হয়, তবে যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 35 সেমি, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= A$ বর্গ সেমি

এবং বৃত্তটির ব্যাসার্দ্ধ $= r$ সেমি।

প্রশ্নানুসারে $A \propto r^2$ বা $A = kr^2$ – (i) (যেখানে k = ভেদ ধ্রুবক)

$r = 21$ এবং $A = 1386$ (i) সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$1386 = k.(21)^2 \text{ বা } k = \frac{\overset{\overset{\overset{22}{\cancel{66}}}{\cancel{198}}}{\cancel{1386}}}{\underset{\cancel{3}}{\cancel{21}} \times \underset{7}{\cancel{21}}} = \frac{22}{7}$$

$\therefore$ (i) সম্পর্কটি হয়, $A = \frac{22}{7} r^2$

এখন, r = 35 হলে, $A = \frac{22}{7} \times (35)^2 = 22 \times 5 \times 35$

$= 3850$ বর্গ সেমি।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 3850 বর্গ সেমি।

উদাহরণ ঃ 8. যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 একর জমি চাষ করতে পারে তবে 30 একর জমি চাষ করতে 25 জন লোকের কতদিন লাগবে ভেদ প্রণালীতে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, লোক সংখ্যা $= n$, দিন সংখ্যা $= d$ এবং জমির পরিমাণ a একর, এখন $n \propto a$, d অপরিবর্তিত থাকলে, আবার $x \propto \frac{1}{\mathrm{d}}$ যখন a অপরিবর্তিত থাকে।

সুতরাং $x \propto \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}}$ যখন a, d উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

$\therefore\ n = k\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}}$ (k, ধ্রুবক)

শর্তানুসারে, $5 = k.\frac{10}{9}$ বা $k = \frac{5 \times 9}{10} = \frac{9}{2}$

$\therefore\ n = \frac{9}{2} \cdot \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}}$.

বা $25 = \frac{9}{2} \cdot \frac{30}{\mathrm{d}} = \frac{9 \times 15}{\mathrm{d}}$

বা $d = \frac{9 \times \cancelto{3}{15}}{\cancelto{5}{25}} = \frac{27}{5}$ দিন।

উদাহরণ ঃ 9. যদি $a^2 + b^2 \propto ab$ তবে দেখান যে $\mathrm{a} + \mathrm{b} \propto \mathrm{a} - \mathrm{b}$

সমাধান ঃ এখানে, $a^2 + b^2 = kab$, k, a এবং b সাপেক্ষে ধ্রুবক।

এখন, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$= kab + 2ab$

$= ab\ (k+2)$.....(i)

আবার, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$=kab - 2ab$

$= ab\,(k-2)$.....(ii)

$\therefore\ a+b \propto \sqrt{ab}$

$a-b \propto \sqrt{ab} \qquad \therefore\ a+b \propto a-b$

উদাহরণ ঃ 10. যদি $x+y \propto z$ যখন y অপরিবর্তিত এবং $x+z \propto y$ যখন z অপরিবর্তিত, তবে দেখান যে y ও z পরিবর্তিত হলে, $x+y+z \propto yz$.

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে, $x+y = mz$, m ধ্রুবক।

অতএব $x+y+z = (m+1)z$ এবং $x+y+z \propto z$...(i) (y, অপরিবর্তিত)

আবার $x+z = nz$, n ধ্রুবক

$\therefore\ x+y+z = (n+1)\,y$ বা, $x+y+z \propto y$....(ii) (z, অপরিবর্তিত)

(i) এবং (ii) থেকে $x+y+z \propto yz$ যখন y, z উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

উাহরণ ঃ 11. যদি $x \propto y$, প্রমাণ করুন যে $(x^2+y^2)(x-y) \propto x^3+y^3$

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে, $x = my$, m ধ্রুবক।

এখন, $$\frac{\left(x^2+y^2\right)(x-y)}{x^3+y^3} = \frac{\left(m^2+1\right)y^2\,(m-1)\,y}{y^3\left(m^3+1\right)} = \frac{(m-1)\left(m^2+1\right)}{m^3+1} = k$$

সুতরাং $(x^2+y^2)(x-y) = k\,(x^3+y^3)$

বা $(x^2+y^2)(x-y) \propto x^3+y^3$

উদাহরণ ঃ 12. যদি $x^2+y^2 \propto xy$ দেখান যে $x \propto y$.

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে, $x^2+y^2 = mxy$, m ধ্রুবক।

এখন $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = mxy-2xy = xy\,(m-2)$

$\therefore\ x-y \propto \sqrt{xy}$......(i)

আবার $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = mxy+2xy = xy\,(m+2)$

$\therefore\ x+y \propto \sqrt{xy}$......(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই, $x+y \propto x-y$ বা, $(x+y) = k\,(x-y)$ (k, ধ্রুবক)

বা $(1 + k)\ y = (k - 1)\ x$ বা, $\frac{x}{y} = \frac{1+k}{k-1} (k \neq 1)$

$\therefore x \propto y.$

উদাহরণ ঃ 13. দুইটি রাশির যোগফল (যার একটি রাশি x-এর সঙ্গে সরল ভেদে এবং অপরটি x-এর সাথে ব্যস্ত ভেদে আছে। যদি $y = 13$ যখন $x = 6$ হয় তবে $x = 24$ হলে y-এর মান নির্ণয় করুন। যখন দুটি ভেদ ধ্রুবক সমান।

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে, $y = kx + \frac{1}{c}$ ....(1)

$\therefore\ 13 = k\left(6 + \frac{1}{6}\right) = \frac{73}{6}k.\ \therefore\ k = \frac{6 \times 13}{37}$

(i) -এ k-র মান বসিয়ে পাই $y = \frac{6 \times 13}{37}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

যখন $x = 24$, $y = \frac{6 \times 13}{37}\left(24 + \frac{1}{24}\right) = \frac{\cancel{6} \times 13 \times 577}{37 \times \underset{4}{\cancel{24}}}$

$= \frac{7501}{148} = 50\frac{101}{148}$

উদাহরণ ঃ 14. দেওয়া আছে যে, গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের ঘন-এর অনুপাতে থাকে। 3 এবং 5 ব্যাসার্ধের দুটি গোলককে গলিয়ে একটি গোলকে পরিণত করা হল। নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, গোলক দুটির আয়তন V_1 এবং V_2

প্রশ্নানুসারে, $V \infty r^3$ (r = গোলকের ব্যাসার্ধ)

সুতরাং $V_1 + V_2 = K(3^2 + 5^2)$ মনে করি তৃতীয় গোলকটির ব্যাসার্ধ R

অতএব $V_1 + V_2 = KR^3$ (K ধ্রুবক)

বা $KR^3 = K(9 + 25)$ বা $R = \sqrt[3]{34}$

উদাহরণ ঃ 15. যদি $a - b \propto c$ হয় যখন b ধ্রুবক এবং ($a - c \propto b$) হয় যখন c ধ্রুবক তবে দেখান যে, $a - b - c \propto bc$ যখন b ও c উভয়ই চল।

সমাধান ঃ $a - b \propto c$ যখন b ধ্রুবক

$\therefore a-b=k_1c$ [যেখানে k_1= ভেদ ধ্রুবক] যখন b ধ্রুবক

বা $a-b-c=k_1c-c=c\,(k_1-1)$, যখন b ধ্রুবক।

$\therefore a-b-c \propto c$ যখন b ধ্রুবক (কারণ k_1-1 ধ্রুবক).....(i)

আবার $a-c \propto b$ যখন c ধ্রুবক। $\therefore a-c=k_2b$ [যেখানে k_2= ভেদ ধ্রুবক] যখন c ধ্রুবক।

বা $a-c-b=k_2b-b=b\,(k_1-1)$ যখন c ধ্রুবক

$\therefore a-c-b \propto b$ যখন c ধ্রুবক (কারণ k_2-1= ধ্রুবক)......(ii)

$\therefore$(i) ও (ii) থেকে যৌগিক উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$a-b-c \propto bc$ যখন b ও c উভয়েই চল। (প্রমাণিত)

১(খ).৫ অনুশীলনী

1. যদি $y \propto \frac{1}{x^2}$ এবং $x=2$ হলে $y=9$ হয়, তবে যখন $x=3$ তখন y-র মান নির্ণয় করুন। [4]

2. শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

   (i) যদি $a^2 \propto bc$ হয়, তবে $b \propto$ .... $\left[\frac{a^2}{c}\right]$

   (ii) যদি $A \propto B^2$ হয়, তবে $B \propto$ .... $\left[\sqrt{A}\right]$

   (iii) যদি $P \propto \frac{1}{\sqrt{Q}}$ হয়, তবে $Q \propto$ .... $\left[\frac{1}{p^2}\right]$

   (iv) যদি $m \propto \sqrt[3]{n}$ হয়, তবে $n \propto$ .... [m^2]

3. যদি $x^2 \propto yz$, $y^2 \propto zx$ এবং $z^2 \propto xy$ হয়, তবে ভেদের ধ্রুবকত্রয়ের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন।
   [ধ্রুবক তিনটির গুণফল =1]

4. যদি $x+y \propto x-y$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে,

   (i) $(ax+by) \propto (px+qy)$ যেখানে (a, b, p, q ধ্রুবক)

   (ii) $x^2+y^2 \propto x^2-y^2$,

5. যদি $z \propto x$ ও $z \propto \frac{1}{y}$ এবং $z=3$ যখন $x=3$, $y=10$, z-এর মান নির্ণয় করুন যখন $x=9$, $y=15$ **[উত্তর ঃ** $z=12$]

6. y তিনটি রাশির সমষ্টির সাথে সরল ভেদে আছে যার প্রথমটি x^2-এর সাথে, দ্বিতীয়টি x-এর সাথে সরল ভেদে এবং তৃতীয়টি ধ্রুবক। যদি $y = 6$, 11 এবং 18 হয় যখন $x = 1$, 2 এবং 3, তবে x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন। [**উত্তর** ঃ $y = x^2 + 2x + 3$]

7. যদি $x + y \propto z$ যখন y ধ্রুবক এবং $x + z \propto y$ যখন z ধ্রুবক, তবে দেখান যে $x + y + z \propto yz$, যখন y, z উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

8. যদি $x \propto y^2$, $x \propto \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ এবং যদি $y = 2$ যখন $y = 4$ এবং $z = 8$ হয়, তবে y-এর মান নির্ণয় করুন যখন $x = 3$ এবং $z = 27$. [**উত্তর** ঃ $y = \pm 6$]

9. যদি $x + y \propto z + \frac{1}{z}$ এবং $x - y \propto z - \frac{1}{z}$ হয় তবে x ও z-এর সম্পর্ক নির্ণয় করুন যদি $z = 2$ হয় যখন $x = 3$ এবং $y = 1$ [**উত্তর** ঃ $x = \frac{22}{15}z + \frac{2}{15z}$]

10. যদি $(x + y) \propto (x - y)$ হয় তবে দেখান $x^2 + y^2 \propto xy(x - y)$

11. যদি $x \propto \frac{1}{y}$ তবে, $x + y$ ক্ষুদ্রতম হবে যখন $x = y$.

12. যদি $y + z - x$ ধ্রুবক হয় এবং $(z + x - y)(x + y - z) \propto yz$ তবে প্রমাণ করুন যে $x+y+z \propto yz$.

13. যদি $x \propto y + z$, $y \propto z + x$ এবং $z \propto x + y$ এবং k, l, m যথাক্রমে তাদের ভেদ-ধ্রুবক হয়, তবে দেখান যে $\frac{k}{k+1} + \frac{l}{l+1} + \frac{m}{m+1} = 1$.

14. $x \propto yz^2$, $y \propto ab^2$, এবং $z \propto \frac{b}{a}$ হলে x-এর সাথে a, b-র সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

[**উত্তর** ঃ $x \propto \frac{b^4}{a}$]

15. যন্ত্রের কর্মক্ষমতা E, y^2-এর সাথে সরল ভেদে ও $\sqrt[3]{z}$ -এর সাথে ব্যস্ত ভেদে আছে। কোন যন্ত্রের E-কে ধরা যায় 1, যখন $y = 6$ এবং $z = 27$ পরবর্তী সময়ে দেখা গেল $y = 4$ এবং $z = 8$। তাহলে ঐ সময়ে যন্ত্রটির কর্মক্ষমতা কত পরিমাণ হ্রাস পেল, তা শতকরা হিসেবে নির্ণয় করুন।

[**উত্তর** ঃ $33\frac{1}{3}\%$]

16. b-র মান দুটি রাশির সমষ্টির সমান, যাদের একটি a-র সহিত সরল ভেদে এবং অপরটি a^2-র সাথে ব্যস্ত ভেদে আছে। যদি $b = 49$ হয়, যখন, $a = 3$ অথবা 5, তবে a ও b-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন। [**উত্তর** ঃ $b = 8a + \frac{225}{a^2}$]

17. একজন গ্রন্থকার নির্দিষ্ট থোক টাকা এবং প্রত্যেকটি বিক্রীত বই-এর জন্য নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ অনুদান পান। 500 এবং 1350 খানি বিক্রীত বই-এর জন্য তিনি যথাক্রমে মোট 750 টাকা এবং 1175 টাকা পেলেন। 10,000 খানি বই-এর জন্য তিনি মোট কত টাকা পাবেন? [**উত্তর** ঃ 5,500 টাকা]

18. একটি ছাত্রাবাসের ব্যয় আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক ছাত্র সংখ্যার সাথে সরল ভেদে আছে। ছাত্র সংখ্যা যদি 120 হয় তবে ব্যয় 2000 টাকা এবং ছাত্র সংখ্যা 100 হলে ব্যয় 1700 টাকা, তবে 1880 টাকা ব্যয় হলে ছাত্র সংখ্যা কত? [**উত্তর** ঃ 112 জন]

19. একটি গোলকের আয়তন $\infty\ r^2$ এবং পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $\infty\ r^3$ (r গোলকের ব্যাসার্ধ)। দেখান যে (আয়তন)^2 ∞ (পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল)^3।

20. 14 জন শ্রমিক প্রতিদিন 9 ঘণ্টা কাজ ক'রে 12 দিনে 3780 আমচারা রোপণ করে। কতজন শ্রমিক দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ ক'রে 45 দিনে 9000 চারা রোপণ করবে? [**উত্তর** ঃ 20 জন]

21. একটি হীরকখণ্ড তিনটি অংশে বিভক্ত হল। অংশগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 এবং এর ফলে 22,000 টাকা ক্ষতি হল। যদি হীরকের মূল্য তার ওজনের বর্গের সাথে সমানুপাতী হয় তবে অখণ্ড পাথরটির মূল্য নির্ণয় করুন। [**উত্তর** ঃ 36,000 টাকা]

22. একটি মোটরগাড়ীর পেট্রলের খরচ তার বেগের বর্গের সঙ্গো সরল ভেদে আছে। বেগ ঘণ্টায় 32 কিমি হলে প্রতি ঘণ্টায় 2 লি. পেট্রোল লাগে। যদি প্রতি লিটারের মূল্য 10 টাকা এবং অন্যান্য খরচ ঘণ্টায় 11·25 টাকা হয়, তবে 100 কি.মি. যেতে কমপক্ষে কত টাকা ব্যয় হবে? [**উত্তর** ঃ 93·75 টাকা]

একক ১(গ) □ সূচকের নিয়মাবলী ও করণী (Law of Indices and Surds)

গঠন

১(গ).১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি সূচকের মূল নিয়মগুলি তালিকাভুক্ত করতে পারবেন। এই নিয়মগুলি প্রয়োগ করে সূচক সম্বন্ধীয় বিভিন্ন প্রশ্নের সমাধান করতে পারবেন। করণী সম্বলিত রাশিমালাকে শুদ্ধ বা মিশ্র করণী, সরল, দ্বিপদ, ত্রিপদ যৌগিক, সদৃশ, অসদৃশ ও অনুবন্ধী সরলী হিসাবে চিহ্নিত করতে পারবেন। দ্বিঘাত করণীর ধর্মগুলি বিবৃত করতে পারবেন। দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল নির্ণয় করতে পারবেন। করণী নিরসন উৎপাদক নির্ণয় করতে পারবেন।

১(গ).২ সূচকের সংজ্ঞা

$a \times a \times a = a^3$ এইরূপ লেখা হয়। সাধারণভাবে $a \times a \times ..... \times a$ (n সংখ্যক a র গুণফল) $= a^n$, যদি $n \geq 2n$ কে সূচক বা ঘাত বলে। এখানে a একটি বাস্তব রাশি।

যদি $n = 1$ তবে $a^1 = a$ হবে।

১(গ).২.১ সূচকের মূল বা নিয়মাবলী

যদি m এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বা অখণ্ড সংখ্যা হয় তবে—

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$ এবং $a \neq 0.$

$= 1$, $m = n$ এবং $a \neq 0.$

$= \frac{1}{a^{n-m}}$, $m < n$ এবং $a \neq 0.$

3) $(a^m)^n = a^{mn} = a^m a^m .....a^m$ (n সংখ্যক)

4) $(ab)^n = a^n b^n$ এবং $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0.$

5) $a^o = 1$

6) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$

উপরের সূত্রগুলি সহজেই প্রমাণ করা যায়।

মনে রাখতে হবে m, n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হলেও উপরের সূত্রগুলি সত্য হবে।

১(গ).২.২ উদাহরণমালা

উদাহরণ ঃ 1. সরল করুন ঃ

i) $9^{-5/2} = \frac{1}{9^{5/2}} = \frac{1}{\left(9^{1/2}\right)^5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$

ii) $\sqrt{a^3} \times a^{3/5} \times \sqrt[5]{a^{-3}} \, . \, \frac{1}{a^{-4}} = a^{3/2} . a^{3/5} . a^{-3/5} . a^4$

$$= a^{3/2 + 3/5 - 8/5 + 4} = a^{9/2} = \sqrt{a^9}$$

iii) $\sqrt{a.^4 b^{-3/4} . c^{5/6}} + \sqrt[3]{a^{9/2} . b^{1/4} . c^{5/4}} = \dfrac{a^{4/2} . b^{-3/8} . c^{5/12}}{a^{3/2} . b^{1/12} . c^{5/12}}$

$$= a^{\frac{4}{2} - \frac{3}{2}} . b^{-\frac{3}{8} - \frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{2}} . b^{-\frac{11}{24}}$$

উদাহরণ ঃ 2. $x^y = y^x$ হলে দেখান যে $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y} - 1}$

$x^y = y^x$

বা $\quad x = y^{\frac{x}{y}}$

$$\therefore \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{(y)^{\frac{x}{y}}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{x} = x^{\frac{x}{y} - 1}$$

উদাহরণ ঃ 3. যদি $a = b^x, \; b = c^y, \; c = a^2$ হয় প্রমাণ করুন যে $xyz = 1$.

এখানে $a = b^x = (c^y)^x = c^{yx} = (a^2)^{yz}$

সুতরাং $xyz = 1$.

উদাহরণ ঃ 4. যদি $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয় প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$

এখানে $a^x = b^y$ বা $a^x = b^{\frac{y}{x}}$

আবার $c^x = b^y$ বা $c = b^{\frac{y}{z}}$ $\qquad \therefore \; ac = b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{y}{z}} = b^{y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)}$

$b^2 = ac$ থেকে পাই $b^2 = b^{y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}$

বা $2 = y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$ বা $\frac{2}{y} = \frac{1}{x}+\frac{1}{z}$

উদাহরণ ঃ 5. $x = 1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হলে প্রমাণ করুন যে $x^3-3x^2-6x-4=0$

প্রশ্নানুসারে, $x-1 = 3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \quad (x-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^2+3+3.3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)$

$= 12+3.3(x-1)$

বা $\quad x^3-3x(x-1)-1 = 12+9x-9$

বা $\quad x^3-3x^2+3x-1 = 3+9x$

বা $\quad x^3-3x^2-6x-4 = 0$

উদাহরণ ঃ 6. সমাধান করুন ঃ

$81^{x} = 3{\cdot}9^{x+3}$

$\therefore \quad 3^{4x} = 3.3^{2x-6}$ বা $3^{4x} = 3^{2x+7}$

$\therefore \quad 4x = 2x+7$ বা $2x = 7$ বা $x = \frac{7}{2}$

উদাহরণ ঃ 7. সমাধান করুন ঃ

$4^{x+2} = 2^{2x+1}+28$

$2^{2x+4} = 2^{2x+1}+28$ বা $\quad 2^{2x+1}.2^3-2^{2x+1} = 28$

বা $\quad 7.2^{2x+1} = 28$ বা $2^{2x+1} = 4 = 2^2$

$\therefore \quad 2x+1 = 2$ বা $x = \frac{1}{2}$

উদাহরণ ঃ 8. সমাধান করুন ঃ

$3^{x-y} = 27$ ....(1)

$8^{x} = 2.16^{x+2y}$ ....(2)

(1) থেকে $3^{x-y} = 3^3 \quad \therefore x+y = 3$ ....(3)

আবার (2) থেকে $(2^3)^x = 2.(2^4)^{x+2y} = 2^{4x+8y+1}$

$\therefore\ 3x = 4x + 8y + 1$ বা $x = 8y + 1 = 0$ ....(4)

(3) এবং (4) থেকে পাই $x = \frac{25}{7}$, $y = -\frac{4}{7}$

উদাহরণ ঃ 9. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মধ্যে কোন সংখ্যাটি বড় তা নির্ণয় করুন :

(a) 2^{300}, 3^{200}, (b) 54^4, 21^{12}, (c) $(0.4)^4$, $(0.8)^3$

সমাধান ঃ (a) $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$

$3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

$\therefore\ 9^{100} > 8^{100}$ বা $3^{200} > 2^{300}$

(b) $(54)^4 = (2\cdot 27)^4 = 2^4.(27)^4 = 2^4 \,.\, 3^{12}$

$(21)^{12} = (3\cdot 7)^{12} = 3^{12}.7^{12} = (7^3)^4 \,.\, 3^{12} = (343)^4 \,.\, 3^{12}$

এখন $(343)^4 \,.\, 3^{12} > 2^4.(27)^4$ সুতরাং $(21)^{12} > (54)^4$

(c) $(0\cdot 4)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 . \left(\frac{2}{5}\right)$

$(0\cdot 8)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 .2^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 .8$

এখন $\left(\frac{2}{5}\right)^3 .8 > \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)$ সুতরাং $(0\cdot 8)^3 > (0\cdot 4)^3$

উদাহরণ ঃ 10. প্রমাণ করুন ঃ

(i) $\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}} = 1$

(ii) $\sqrt[p+q]{\frac{x^{p^2}}{x^{q^2}}} \times \sqrt[q+r]{\frac{x^{q^2}}{x^{r^2}}} \times \sqrt[r+p]{\frac{x^{r^2}}{x^{p^2}}} = 1$

(iii) $\dfrac{\left(p^2 - \frac{1}{q^2}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2 - \frac{1}{p^2}\right)^q \left(q + \frac{1}{p}\right)^{p-q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$

(iv) $\dfrac{1}{1+p+q^{-1}}+\dfrac{1}{1+q+r^{-1}}+\dfrac{1}{1+r+p^{-1}}=1$ যখন $pqr=1$ হয়।

সমাধান (i) **বামপক্ষ** $=\dfrac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}}+\dfrac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}$

$$=\frac{x^a}{x^a\left(1+x^{b-a}+x^{c-a}\right)}+\frac{x^b}{x^b\left(1+x^{a-b}+x^{c-b}\right)}+\frac{x^c}{x^c\left(1+x^{a-c}+x^{b-c}\right)}$$

$$=\frac{x^a}{x^a+x^b+x^c}+\frac{x^b}{x^b+x^a+x^c}+\frac{x^c}{x^c+x^a+x^b}$$

$=\dfrac{x^a+x^b+x^c}{x^a+x^b+x^c}=1=$ ডানপক্ষ প্রমাণিত।

(ii) **বামপক্ষ** $=\sqrt[p+q]{\dfrac{x^{p^2}}{x^{q^2}}}\times\sqrt[q+r]{\dfrac{x^{q^2}}{x^{r^2}}}\times\sqrt[r+p]{\dfrac{x^{r^2}}{x^{p^2}}}$

$$=\left(x^{p^2-q^2}\right)^{\frac{1}{p+q}}\times\left(x^{q^2-r^2}\right)^{\frac{1}{q+r}}\times\left(x^{r^2-p^2}\right)^{\frac{1}{r+p}}$$

$$=x^{\frac{(p+q)(p-q)}{p+q}}\times x^{\frac{(q+r)(q-r)}{q+r}}\times x^{\frac{(r+p)(r-p)}{r+p}}$$

$=x^{p-q}\times x^{q-r}\times x^{r-p}=x^{p-q+q-r+r-p}=x^0=1$ ডানপক্ষ প্রমাণিত।

(iii) **বামপক্ষ** $=\dfrac{\left(p^2-\dfrac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\dfrac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^{p-q}}$

$$= \frac{\left(\frac{p^2q^2-1}{q^2}\right)^p \left(\frac{pq-1}{q}\right)^{q-p}}{\left(\frac{q^2p^2-1}{p^2}\right)^q \left(\frac{qp+1}{p}\right)^{p-q}}$$

$$= \frac{\{(pq+1)(pq-1)\}^p}{q^{2p}} \times \frac{(pq-1)^{q-p}}{q^{q-p}} \times \frac{p^{2q}}{\{(pq+1)(pq-1)\}^q} \times \frac{p^{p-q}}{(pq+1)^{p-q}}$$

$$= \frac{(pq+1)^p . (pq-1)^p . (pq-1)^{q-p}}{(pq+1)^q . (pq-1)^q . (pq+1)^{p-q}} . \frac{p^{2q+p-q}}{q^{2p+q-p}}$$

$$= \frac{(pq+1)^{p-q-p+q}}{(pq-1)^{q-p-q+p}} . \frac{p^{q+p}}{q^{p+q}} \left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$$ = ডানপক্ষ প্রমাণিত।

(iv) **বামপক্ষ** $= \frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+r^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$ [দেওয়া আছে $pqr = 1$]

$$= \frac{1}{1+p+\frac{1}{q}} + \frac{1}{1+q+\frac{1}{r}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$= \frac{q}{q+pq+1} + \frac{r}{r+qr+1} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$= \frac{q}{q+\frac{1}{r}+1} + \frac{r}{r+\frac{1}{q}+1} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$\left[\because pqr = 1 \quad \therefore pq = \frac{1}{r} = r^{-1} \qquad qr = \frac{1}{p} = p^{-1}\right]$$

$$= \frac{qr}{qr+1+r} + \frac{r}{1+r+p^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$= \frac{p^{-1}}{1+r+p^{-1}} + \frac{r}{1+r+p^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}} = \frac{p^{-1}+r+1}{1+r+p^{-1}} = 1$$ = ডানপক্ষ প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ 11. $x^{x\sqrt{x}} = \left(x\sqrt{x}\right)^{x}$ হলে x-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^{x\sqrt{x}} = \left(x\sqrt{x}\right)^{x}$

বা $\left(x^{\sqrt{x}}\right)^{x} = \left(x\sqrt{x}\right)^{x}$ $\quad \therefore \; x^{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$

বা $x^{\sqrt{x}} = x.(x)^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}}$

বা $x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}$ $\quad \therefore \sqrt{x} = \frac{3}{2}$ বা $x = \frac{9}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় x-এর মান $\frac{9}{4}$ [Ans.]

উদাহরণ ঃ 12. $x^{p^{q}} = \left(x^{\sqrt{p}}\right)^{q}$ হলে p-কে q দ্বারা প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ $x^{p^{q}} = \left(x^{\sqrt{p}}\right)^{q}$

বা $x^{p^{q}} = x^{\sqrt{p}.q}$ $\quad \therefore \; p^{q} = q\sqrt{p}$

বা $\frac{p^{q}}{\sqrt{p}} = q$ বা $p^{pq\cdot\frac{1}{2}} = q$

বা $p^{\frac{2q-1}{2}} = q$ $\quad \therefore p = q^{\frac{2}{2q-1}}$ **[Ans.]**

১(গ).৩ করণী বলতে কী বোঝায়

যে সকল বাস্তব সংখ্যা কোন মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের বীজ সেগুলিকে বৈজিক (Algebraic) সংখ্যা বলে। যেমন 1.5, $1+\sqrt{2}$ ইত্যাদি।

যে সকল বাস্তব সংখ্যা কোন মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের বীজ নয় তাকে তুরীয় সংখা (Transcendental number) বলে। যথা e, π ইত্যাদি।

অমূলদ বৈজিক সংখ্যাকে করণী (Surd) বলে।

অর্থাৎ কোন মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের অমূলদ বীজকে করণী বলে। যথা $\sqrt{2}$, কারণ $\sqrt{2}$ হ'ল $x^2-2=0$ সমীকরণের অমূলদ বীজ, আবার $3+\sqrt{2}$ একটি করণী কারণ এটি $x^2-6x+7=0$ মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের একটি অমূলদ বীজ।

দ্রষ্টব্য ঃ করণী মাত্রই অমূলদ রাশি কিন্তু অমূলদ রাশি মাত্রই করণী নয়। যথা π, e ইত্যাদি করণী নয়।

১(গ).৪ করণীর ক্রম (Order)

করণীর মূল-সূচক সংখ্যা দ্বারা ইহার ক্রম নির্ণয় করা হয়। যথা $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[n]{a}$ যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় ও n-তম ক্রমের করণী (বা দ্বিঘাত, ত্রিঘাত ও n-ঘাত করণী)।

১(গ).৫ করণীর প্রকারভেদ

১(গ).৫.১ শুদ্ধ ও মিশ্র করণী

একটি মূলদ সংখ্যা ($\neq 1$) ও একটি করণীর গুণফলকে মিশ্র করণী বলে। যথা $2\sqrt{3}, 3\sqrt{5}$ ইত্যাদি।

কোন করণীতে কোন মূলদ সহগ না থাকলে ($\neq 1$) তাকে শুদ্ধ করণী বলে। যথা, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{2}$ ইত্যাদি।

১(গ).৫.২ সরল, দ্বিপদ, ত্রিপদ ও যৌগিক করণী (Simple, Binomial, Trinominal and Compound Surd)

একটি মাত্র পদবিশিষ্ট করণীকে $\left(\sqrt{5}, a\sqrt[n]{b}\right)$ সরল করণী বলা হয়।

একটি করণী ও একটি মূলদ সংখ্যার অথবা দুটি করণীয় বীজগাণিতিক সমষ্টিকে দ্বিপদ করণী

($5+\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$ ইত্যাদি) বলে। অনুরূপে, $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$, $5+\sqrt[3]{4}-\sqrt{7}$ ইত্যাদি ত্রিপদ করণী।

একটি মূলদ সংখ্যা ও একটি বা একাধিক করণীর অথবা দুই বা ততোধিক করণীর বীজগাণিতিক সমষ্টিকে যৌগিক করণী বলে। যথা, $3+\sqrt{2}$, $\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $\sqrt{2}-2$, $\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{4}$ ইত্যাদি যৌগিক করণী।

১(গ).৫.৩ সদৃশ ও অসদৃশ করণী

যে সকল করণীর একই অমূলদ উৎপাদক থাকে অথবা যে করণীগুলিকে একই অমূলদ উৎপাদক বিশিষ্ট করণীরূপে প্রকাশ করা যায়, তাদের **সদৃশ করণী** (Similar Surd) বলে, অন্যথায় এদের **অসদৃশ করণী** বলে। $\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ ইত্যাদি সদৃশ করণী কারণ প্রত্যেকটির অমূলদ উৎপাদক $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{27}$ এরাও সদৃশ করণী কারণ $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

১(গ).৫.৪ অনুবন্ধী (Conjugate) করণী

দুটি দ্বিপদ বিশিষ্ট দ্বিঘাত করণীর পদদ্বয় একই হলে এবং তাদের সংযোগকারী চিহ্নটি বিপরীত হলে একটিকে অপরটির অনুবন্ধী বলে। $a+\sqrt{b}$ এবং $a-\sqrt{b}$ করণী দুটি পরস্পর অনুবন্ধী।

১(গ).৬ করণী-নিরসন (Rationalisation of Surds)

কোন করণীকে অন্য কোন করণীর দ্বারা গুণ করলে যদি কোন মূলদ রাশি পাওয়া যায় তবে একটিকে অপরটির **করণী-নিরসন উৎপাদক** বলে।

সুতরাং একটি দ্বিঘাত, দ্বিপদ করণীর অনুবন্ধী করণী তার করণী-নিরসন উৎপাদক।

করণী-নিরসন উৎপাদকের কয়েকটি উদাহরণ ঃ

(a) যদি $s=\sqrt{x}+\sqrt{y}, k=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, হবে করণী-নিরসন উৎপাদক ; কেননা

$$sk=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=x-y,\ (x\geq 0, y\geq 0)$$

(b) দেখান যে (i) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$-এর করণী-নিরসন উৎপাদক $(x)^{\frac{2}{3}}-(xy)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$

(ii) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$এর করণী-নিরসন উৎপাদক $(x)^{\frac{2}{3}}+(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$

১(গ).৭ দ্বিপদ করণীর ধর্মাবলী

(1) দুটি সদৃশ দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদ হবে। বিপরীতক্রমে যদি দুটি করণীর গুণফল এবং ভাগফল মূলদ হয়, তবে করণী দুটি সদৃশ হবে।

(2) দুটি অসদৃশ দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদরাশি হতে পারেনা।

(3) একটি সরল দ্বিঘাতকরণী কখনও একটি মূলদ রাশি ও একটি দ্বিঘাত করণীর যোগফল বা অন্তরফলের সমান হতে পারে না।

[**প্রমাণ** ঃ যদি সম্ভব হয়, মনে করি, $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$ (a, b, c মূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{a}, \sqrt{c}$ দ্বিঘাত করণী)।]

সুতরাং $a=\left(b\pm\sqrt{c}\right)^2=b^2+c^2\pm 2b\sqrt{c}$

$\therefore \sqrt{c}=\pm\frac{\left(a-b^2-c^2\right)}{2b}$ এটি একটি মূলদ রাশি।

অর্থাৎ একটি করণী (অমূলদ রাশি) একটি মূলদ রাশির সমান হচ্ছে। কিন্তু এটা অসম্ভব। অতএব $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$ এরূপ সম্ভব নয়।

(4) যদি $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ হয় এবং যদি x ও a মূলদ এবং $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ অমূলদ হয় তবে $x=a$ এবং $y=b$ হবে।

[প্রমাণ ঃ মনে করি, $x\neq a$ এবং $x=a+m$ (m মূলদ)

$\therefore a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}=a+\mathrm{m}+\sqrt{y}$

$\therefore \sqrt{b}=m+\sqrt{y}$ অর্থাৎ একটি সরল দ্বিঘাত করণী একটি হলুদ মূলদ রাশি ও একটি করণীর সমষ্টির সমান হচ্ছে যেটা অসম্ভব। সুতরাং $x=a$ এবং $y=b$ ।

অনুরূপে $a-\sqrt{b}=x-\sqrt{y}$ হলে $x=a,\ y=b$ হবে।

যদি $a\pm\sqrt{b}=0$ হয় তবে $a=0,\ b=0$]

(5) যদি $\sqrt{\left(x+\sqrt{y}\right)}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ তবে $\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

১(গ).৮ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল

আমরা জানি, $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ এর বর্গ একটি মূলদ রাশি ও একটি অমূলদ রাশির সমষ্টি হবে। অর্থাৎ $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$-এর বর্গকে x+ $\sqrt{y}$ আকারে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং $\left(x+\sqrt{y}\right)$-এর বর্গমূল $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ আকারের হবে।

(i) $a+\sqrt{b}$ -এর বর্গমূল নির্ণয় ঃ

মনে করি, $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

বা $a+\sqrt{b}=\left(x+\sqrt{y}\right)^2=x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}$

$\therefore a=x+y$......(1) এবং $b=4xy$......(2)

এখন $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-b$

$\therefore x-y=\pm\sqrt{a^2-b}$

আবার $x+y=a$

$\therefore 2x=a\pm\sqrt{a^2-b}$ বা $x=\frac{1}{2}\left[a\pm\sqrt{a^2-b}\right]$

এবং $y=\frac{1}{2}\left[a\mp\sqrt{a^2-b}\right]$

সুতরাং $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)}\right]$

অনুরূপে $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ আকারের হবে।

(ii) $\left(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)$ এর বর্গমূল নির্ণয় ঃ

মনে করি, $\sqrt{\left(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)}=\pm\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$ ......(1)

উভয় পক্ষের বর্গ করে পাই $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}},\quad y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}$

এবং $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}$, সুতরাং নির্ণেয় বর্গমূল (1)-এ x, y ও z-এর মান বসিয়ে পাই।

দ্রষ্টব্য ঃ যেহেতু $a=x+y+z$ আমরা পাই $2a\sqrt{bcd}=bd+bc+cd$

উপরের শর্ত পূরণ না হলে $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$ আকারে বর্গমূল নির্ণয় করা সম্ভব হবে না।

১(গ).৮.১ উদাহরণমালা

উদাহরণ ঃ 1. মান নির্ণয় করুন ঃ $\frac{4+2\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}$

হরের করণী-নিরসন ক'রে পাই

$$\frac{4+2\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}=\frac{\left(4+2\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)}{\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)}=\frac{28+2\sqrt{5}-30}{49-9\times 5}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

উদাহরণ ঃ 2. সরল করুন ঃ $\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}+\frac{3\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}-\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

প্রথম রাশি $\frac{2\sqrt{3}\left(3-\sqrt{6}\right)}{9-6}=\frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{3}.\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

দ্বিতীয় রাশি $\frac{3\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{2}\left(2-\sqrt{6}\right)}{4-6}=\frac{6\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

তৃতীয় রাশি $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{5\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3}=5\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

$$= \sqrt{3}\,(2+3-5) - \sqrt{2}\,(2+3-5) = 0$$

উদাহরণ ঃ 3. করণী-নিরসন করুন ঃ $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}{\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\right]\left[\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right]}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5-5+2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

উদাহরণ ঃ 4. করণী-নিরসন উৎপাদক নির্ণয় করুন ঃ $\sqrt{5}+\sqrt[3]{7}$

$\sqrt{5}+\sqrt[3]{7} = 5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{3}}$; 2 এবং 3 এর ল.সা.গু. $= 6$

মনে করি $x = 5^{\frac{1}{2}}$ এবং $y = 7^{\frac{1}{3}}$

$\therefore x^6 + y^6 = (x+y)(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5)$

এখানে $x^6 = 125$, $y^6 = 49$ অতএব $x^6 + y^6$ মুলদ।

সুতরাং $x + y = \sqrt{5}+\sqrt[3]{7}$ এর করণী-নিরসন উৎপাদক

$x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$

$= 5^{\frac{5}{2}} - 5^2.7^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{3}{2}}.7^{\frac{2}{3}} - 5.7 + 5^{\frac{1}{2}}.7^{\frac{4}{3}} - 7^{\frac{5}{3}}$

উদাহরণ ঃ 5. যদি $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ হয় প্রমাণ কর যে $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

সমাধান ঃ

দেওয়া আছে, $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$

$\therefore x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ (উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই)

বা $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$

পুনরায় বর্গ করে পাই $(x^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2$

$\therefore\ x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ 6. যদি $x = 7 - 4\sqrt{3}$ হয় তবে $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$-এর মান নির্ণয় করুন।

$x = 3 + 4 - 22\sqrt{3} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$

$\therefore\ \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{4 - 3} = +2 + \sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = +4$

উদাহরণ ঃ 7. $(7+4\sqrt{3})$র বর্গমূল নির্ণয় করুন।

মনে করি, $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \pm\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$

বা $7+4\sqrt{3} = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + y + 2\sqrt{xy}$

সুতরাং $x + y = 7$.................(1)

$\sqrt{xy} = 2\sqrt{3}$

বা $xy = 12$.................(2)

$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 49 - 48$

$=1$ [1 এবং 2 থেকে]

$\therefore\ x - y = 1$.................(3)

[1 এবং 3 থেকে পাই $x = 4,\ y = 3$]

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\left(2 + \sqrt{3}\right)$

অন্যভাবে, $7+4\sqrt{3} = 4 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 22\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\left(2 + \sqrt{3}\right)$

উদাহরণ ঃ 8. বর্গমূল নির্ণয় করুন ঃ $10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$

মনে করি $\sqrt{\;}\left(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}\right) = \pm\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$

সুতরাং $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15} = x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$

$\therefore\ x+y+z = 10....(1)$

$xy = 6......(2),\ yz = 10......(3),\ zx = 15......(4),$

(2), (3) এবং (4) থেকে পাই $xyz = \sqrt{6}.\sqrt{10}.\sqrt{15}$

$\therefore\ xyz = 30......(5),$

$\therefore x = \frac{xyz}{zy} = \frac{30}{10} = 3$

$y = \frac{xyz}{zy} = \frac{30}{15} = 2$

$z = \frac{xyz}{xy} = \frac{30}{6} = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

অন্য পদ্ধতি ঃ

$$10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15} = \left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{2}.\sqrt{3}+2\sqrt{5}.\sqrt{2}+2+\sqrt{5}.\sqrt{3}$$

$$= \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$

উদাহরণ ঃ 9. ঘনমূল নির্ণয় করুন ঃ $10+6\sqrt{3}$

মনে করি $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = x+\sqrt{y}$ ....(1)

সুতরাং $\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = x-\sqrt{y}$

$\therefore\ \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}.\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = \left(x+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{y}\right)$

বা $\left(x^2 - y\right) = \sqrt[3]{100-108} = -2$ ....(2)

(1) থেকে $10+6\sqrt{3} = \left(x+\sqrt{y}\right)^3 = x^3 + y\sqrt{y} + 3xy + 3x^2\sqrt{y}$

$$= (x^3 + 3xy) + y\sqrt{y} + 3x^2\sqrt{y}$$

$\therefore\ x^3 + 3xy = 10.$ (2) থেকে y-এর মান বসিয়ে পাই—
$x^3 + 3x\,(x^2 + 2) = 10.$
বা $4x^3 + 6x - 10 = 0$ বা $2x^3 + 3x - 5 = 0$

$\therefore\ x = 1$ এবং (2) থেকে $y = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $1+\sqrt{3}$

উদাহরণ ঃ 10. চতুর্থমূল নির্ণয় করুন ঃ $17+12\sqrt{2}$

$$17+12\sqrt{2} = 17+2\sqrt{72} = 9+8+2\sqrt{9}.\sqrt{8} = \left(\sqrt{9}+\sqrt{8}\right)^2$$

$$= \left(3+2\sqrt{2}\right)^2 = \left(2+1+2.1\sqrt{2}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}+1\right)^4$$

$$\therefore \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$$

১(গ).৯ অনুশীলনী

[ক]

1. সরল করুন ঃ (i) $\left(\dfrac{x^p}{x^q}\right)^{p+q} + \left(\dfrac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$ [উত্তর ঃ $\dfrac{1}{x^{p^2+q^2}}$]

(ii) $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-1} \times \left(\dfrac{x^n}{x^1}\right)^{n+1-m} \times \left(\dfrac{x^1}{x^m}\right)^{1+m-n}$ [উত্তর ঃ 1]

(iii) $\sqrt[1n]{\frac{x^1}{x^n}} \times \sqrt[mn]{\frac{x^n}{x^m}} \times \sqrt[1m]{\frac{x^m}{x^1}}$ [উত্তর ঃ 1]

(iv) $\left(\frac{1}{a^{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}} \times \left(\frac{1}{a^{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}} \times \left(\frac{1}{a^{z-y}}\right)^{\frac{1}{z-x}}$ [উত্তর ঃ 1]

(v) $\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-b} + 1}$ দেওয়া আছে $a + b + c = 0$ [উত্তর ঃ 1]

(2) যদি $2^x = 3^y = 12^{zx}$ হয়, দেখান যে $(x + 2y)z = xy$.

(3) $x = 5 - 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $x^3 - 15x^2 + 60x - 20 = 0$

(4) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}} = 0$ হয়, দেখান যে $(a + b + c)^3 = 27abc$

(5) সরল করুন ঃ $\frac{e^{2c} + e^{-x} - e^{-x} - 1}{e^{2x} + e^{-x} + e^{x} - 1}$ [উত্তর ঃ $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$]

(6) $y = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$ হ'লে প্রমাণ করুন যে $y^3 + 3y = x - \frac{1}{x}$

(7) যদি $a^{m^n} = \left(a^m\right)^n$ হয়, তবে m কে n এর সাপেক্ষে নির্ণয় করুন। $\left[m = n^{\frac{1}{x-1}}\right]$

সমাধান করুন ঃ

(8) $\left(\sqrt{3}\right)^{x+4} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x+1}$ [উত্তর ঃ $x = 10$]

(9) $x^y = y^x$ এবং $x = 2y$ [উত্তর ঃ $x = 0,\ y = 0$]

(10) $5^{2x+1} = 5^{2x} + 100$ এবং [উত্তর ঃ $x = 1$]

(11) (i) $2^x.6^y = 24$ এবং $2^{2x}.3^y = 48$ [উত্তর ঃ $x = 2,\ y = 1$]

(ii) $2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$ এবং $2^{x+2}.2^{y+2} = 16$ [উত্তর ঃ $-1,\ 1$]

(iii) $4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$ [উত্তর ঃ $x = 2, 3$]

(iv) $x^y = y^x$ এবং $x^2 = y^3$ [উত্তর ঃ $x = \frac{27}{8}, y = \frac{9}{4}$]

(12) $m = 8$ এবং $y = 27$ হলে $\left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

(13) মানের উর্দ্ধক্রমে সাজান (i) $\sqrt[3]{27}, \sqrt{16}, \sqrt[5]{32}$ (ii) $2^{2^{2^2}}, \left(2^{2^2}\right)^2, \left(2^2\right)^{2^2}$

[উত্তর ঃ (i) $\sqrt[5]{32}, \sqrt[3]{27}, \sqrt{16}$, (ii) বৃহত্তম $2^{2^{2^2}}$ অন্যগুলো সমান।]

(14) $4^x = 8^y$ হলে $\frac{x}{y}$ -এর মান নির্ণয় করুন। [উত্তর ঃ $\frac{3}{2}$]

(15) $\left(x^{n^3}\right)^n = \left(x^{3^n}\right)^3$ হলে, দেখান যে $n + \sqrt[1]{n^4} = 3$

(16) $(56)^a = (5.6)^b = (10)^c$ হলে, দেখান যে, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(17) সরলতম মান নির্ণয় করুন ঃ (i) $\left[1 - \left\{1 - \left(1 - x^3\right)^{-1}\right\}^{-1}\right]^{\frac{-1}{3}}$ এ $x = 0.1$ [উত্তর ঃ 0.1]

(ii) $\dfrac{\left(3^{2n} - 4.3^{3n.2}\right)\left(2^n - 3.2^{n-2}\right)}{2^{n-4}\left(3^{2n+3} - 7.9^n\right)}$ [উত্তর ঃ $\frac{1}{9}$]

(18) যদি $a^p = b^q = (ab)^{pq}$ হয়, তবে দেখান যে, p + q = 1

[খ]

(1) পূর্ণ করণীতে প্রকাশ করুন ঃ (i) $3\sqrt[3]{2}$, (ii) $5\sqrt[3]{7}$ [উত্তর ঃ (i) $\sqrt[3]{54}$, (ii) $\sqrt[3]{875}$]

(2) মানের ক্রম অনুসারে সাজান ঃ $\sqrt[3]{4}, \sqrt{5}, \sqrt[4]{12}$ [উত্তর ঃ $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{12}, \sqrt{5}$]

(3) $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হলে $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y}$-এর মান নির্ণয় করুন। [**উত্তর ঃ** $\frac{15}{13}$]

(4) **সরল করুন ঃ** $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ [**উত্তর ঃ** 0]

(5) **বর্গমূল নির্ণয় করুন ঃ** (i) $41+6\sqrt{32}$ (ii) $28-6\sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{32}-\sqrt{24}$

[**উত্তর ঃ** (i) $\pm\left(4\sqrt{2}+3\right)$ (ii) $\pm\left(3\sqrt{3}-1\right)$ (iii) $\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$]

(6) **বর্গমূল নির্ণয় করুন ঃ** (i) $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ [**উত্তর ঃ** $\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}$]

(ii) $5-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}$ $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right]$

(7) **করণী নিরসন উৎপাদক নির্ণয় করুন ঃ**(i) $5^{1/2}+3^{1/4}$ $\left[5^{1/2}-53^{1/4}+5^{1/2}.3^{1/2}-3^{1/4}\right]$

(ii) $\sqrt[3]{2}+3$ $\left[2^{2/3}-3.2^{1/2}+9\right]$

(8) **সরল করুন ঃ** $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ [2]

(9) $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ হলে, প্রমাণ করুন যে $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

(10) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{2}$ হলে, $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$-এর মান নির্ণয় করুন। $\left[{}^{91}\!/_{73}\right]$

[**সংকেত ঃ** $2\sqrt{a}-2\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ বা $\sqrt{a}=3\sqrt{b}$ বা $a=3b$ বা $a^2=9b^2$]

(11) $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$ -এর বর্গমূল নির্ণয় করুন। $\left[\pm\left(\sqrt{\frac{2a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)\right]$

(12) **ঘনমূল নির্ণয় করুন ঃ** $7-5\sqrt{2}$ [$1-\sqrt{2}$]

(13) **চতুর্থ মূল নির্ণয় করুন ঃ** $28+16\sqrt{3}$ $\left[\pm\left(\sqrt{3}+1\right)\right]$

(14) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ হলে প্রমাণ করুন যে $(x+y+z)^3=27xyz$

(15) যদি $x=2+\sqrt{3}$ হয়, প্রমাণ করুন $x^2-4x+1=0$

একক ২ ❑ প্রগতি (Progression)

গঠন

২.১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ার পর আপনি একটি অনুক্রম সমান্তর, গুণোত্তর বা বিপরীত প্রগতিতে আছে কিনা তা সুনিশ্চিত করতে পারবেন। সমান্তর ও গুণোত্তর প্রগতির সসীম সংখ্যক রাশির যোগফল, সমান্তরীয় ও গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় করতে পারবেন এবং এ সম্পর্কিত বিবিধ প্রশ্নের সমাধান করতে পারবেন।

বিপরীত প্রগতির মধ্যক নির্ণয় করতে পারবেন। একটি অসীম শ্রেণী অভিসারী না অপসারী তা পরীক্ষা করতে পারবেন এবং অভিসারী শ্রেণীর ক্ষেত্রে তার যোগফল নির্ণয় করতে পারবেন।

২.২ সংখ্যার অনুক্রম

ধরি প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য অনুসঙ্গ একটি সংখ্যা পাওয়া যায় এবং যা একটি নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে চলে।

ধরি n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। যদি n-এর অনুসঙ্গ একটি সংখ্যা a_n পাওয়া সম্ভব হয় যা একটি নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে চলে তখন $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ সংখ্যাগুলি একটি অনুক্রম গঠন করে। $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ সংখ্যাগুলিকে অনুক্রমের পদ এবং a_n কে অনুক্রমের n তম পদ বলে। অনুক্রমের পদসংখ্যা যদি সসীম তাহলে অনুক্রমটিকে সসীম বলে এবং পদসংখ্যা অসীম হলে তাকে **অসীম** অনুক্রম বলে।

কয়েকটি সসীম ও অসীম অনুক্রমের উদাহরণ ঃ

(a) $1, 4, 9 \ldots\ldots 100$ সসীম অনুক্রম।

(b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{n} \cdots$ অসীম অনুক্রম।

(c) $2, -3, 4, -5, 6 \ldots\ldots$ অসীম অনুক্রম।

(d) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6 \ldots\ldots$ অসীম অনুক্রম।

(a) অনুক্রমের প্রথম পদ, 1; দ্বিতীয় পদ 4... দশতম পদ—100,
এখানে পদসংখ্যা 10, সুতরাং এটি সসীম অনুক্রম।

(b) অনুক্রমের প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ $+\frac{1}{2} \ldots\ldots n$-তম পদ $= a_n = \frac{1}{n}$ ইত্যাদি।
এখানে পদসংখ্যা অসীম, সুতরাং অসীম অনুক্রম।

অনুরূপভাবে,

(c) অনুক্রমের প্রথম পদ 2, n-তম পদ $a_n = (n+1)$ যদি n বিজোড় সংখ্যা হয়,
এবং $a_n = (-1)^{n-1} + n$ যদি n জোড় সংখ্যা হয়।

(d) অনুক্রমটির প্রথম পদ 1, $a_n = \begin{cases} n \text{ if } n = 2k \\ \frac{1}{n} \text{ if } n = 2k-1, \end{cases}$ $(k = 1, 2 \ldots)$

উদাহরণ (i) $-2, 0, 2, 4 \ldots 2n-4 \ldots$; $a_n = 2n-4$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \cdots \frac{n}{n+1}$; $a_n = \frac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3...)$ অসীম অনুক্রম

(iii) $1, -1, 1, -1...(-1)^{n-1}...$; $a_n=(-1)^{n-1}$, $(n = 1, 2, 3...)$ অসীম অনুক্রম

(iv) 5, 5, 5...5...$a_n = 5$... অসীম অনুক্রম

(v) 7, –5, –6, 0, 1... সসীম অনুক্রম

২.৩ সমান্তর প্রগতি (Arithmetic Progression)

যদি কোন সংখ্যা অনুক্রমের পদগুলি এরূপে গঠিত হয় যে, দ্বিতীয় পদ থেকে শুরু করে পরবর্তী পদগুলি, পূর্ববর্তী পদটির সাথে একটি ধ্রুব সংখ্যা যোগ করলে পাওয়া যায়, তখন এই বিশেষ অনুক্রমটিকে সমান্তর প্রগতি বলা হয়।

ধরি, $a_1, a_1,...a_n$, একটি সমান্তর প্রগতি। সংজ্ঞানুসারে—

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots \; a_{n+1} - a_n = \ldots$$

অর্থাৎ, সমান্তর প্রগতিতে যে কোন পদ ও তার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান থাকে। এই ধ্রুব সংখ্যাটিকে সমান্তর প্রগতির **সাধারণ অন্তর** বলে।

ধরি প্রথম পদটি $a_1 = a$, সাধারণ অন্তর d, তাহলে $a_2 = a_1 + d = a + d$, $a_3 = a_2 + d = a + 2d$ ...$a_n = a_{n-1} + d$... ইত্যাদি।

সুতরাং $a, a + d, a + 2d, a + 3d.... + \{a + (n - 1)d\} +...$ অনুক্রমটি সবসময় একটি সমান্তর প্রগতি।

যদি $a = 2$, $d = 1$ হয় তাহলে

$2, 2 + 1, 2 + 2.1, 2 + 3.1;....$

বা, 2, 3, 4, 5, 6... একটি সমান্তর প্রগতি।

● সমান্তর প্রগতির বিশেষ বৈশিষ্ট্য

একটি সমান্তর প্রগতির যে কোন পদ (দ্বিতীয় পদ থেকে শুরু করে), পরবর্তী পদ ও উত্তর পদের সমান্তরীয় মধ্যক (বা গড়)।

ধরি, $a_1, a_2\, a_3.... a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$.....একটি সমান্তর প্রগতি এবং d সাধারণ অন্তর।

অতএব, $a_2 = a_1 + d$..........(i)

$a_3 = a_2 + d$.........(ii)

(i) ও (ii) বিয়োগ করে $a_2 - a_3 = a_1 - a_2$

বা, $2a_2 = a_1 + a_3$

বা, $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} = a_1$ ও a_3-র সমান্তরীয় মধ্যক।

অনুরূপভাবে, $a_n = a_{n-1} + d$

$$\frac{a_{n+1} = a_n + d}{a_n - a_{n+1} = a_{n-1} - a_n}$$

বা $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

● সমান্তর প্রগতির *n*-তম পদ নির্ণয়

ধরি, a_1, a_2 .... a_n একটি সমান্তর প্রগতি।

সুতরাং, $\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}\right\}$ উভয় দিকে যোগ করে পাই,

$a_2 + a_3 .... + a_n = a_1 + a_2 .... + a_{n-1} + (d + d + ...(n-1)$ তম পদ)।

বা, $a_n = a_1 + (n-1)\, d$

সুতরাং n-তম পদ $a_n = a_1 + (n-1)\, d$

২.৩.১ সমান্তর প্রগতির সসীম সংখ্যক পদের সমষ্টি

মনেকরি, প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= d$.

n-তম পদ $= a + (n-1)$ d $= 1$

$\therefore (n-1)$-তম পদ $= 1 - d$

$(n-2)$-তম পদ $= 1 - 2d$ ইত্যাদি।

মনে করি S n-সংখ্যক পরে সমষ্টি।

$\therefore$ $S = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (1 - d) + 1$ শ্রেণীটিকে উল্টোভাবে লিখে পাই

$S = 1 + (1 - d) + (1 - 2d) + ... + (a + d)(a + d) + a$

যোগ করে পাই,

$2S = (a + 1) + (a + 1) + (a + 1) + ... + (a + 1)$, n-সংখ্যক পদ।

$= n\,(a + 1)$

$\therefore\ S = \frac{1}{2} n\,(a+1) = \frac{1}{2} n\,(a + a + \overline{n-1}d)$

$= \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$S = n\left(\frac{a+1}{2}\right) =$ পদসংখ্যা $\times$ $\left(\frac{\text{প্রথমপদ + শেষপদ}}{2}\right)$

২.৩.২ সমান্তরীয় মধ্যক (Arithmetic Mean)

তিনটি রাশি a, b, c যদি সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে $b - a = c - b$ বা, $2b = a + c$ বা, $b = \frac{a+c}{2}$ মধ্যপদ b-কে a ও c-র সমান্তরীয় মধ্যক বলে।

২.৩.৩ উদাহরণমালা

উদাহরণ ঃ 1. 4, 7, 10.... প্রগতিটির 20-তম পদ নির্ণয় করুন।

বিশতম পদ $= a + (20 - 1)\,d$ এখানে $a = 4$ এবং $d = 3$.

$\therefore$ 20-তম পদ $= 4 + 19 \times 3 = 61$.

উদাহরণ ঃ 2. কোন সমান্তর প্রগতির 12-তম পদ ও 25-তম পদ, –27 এবং –66. প্রগতিটি নির্ণয় করুন।

12-তম পদ $= a + 11d = -27$.........(1)

25-তম পদ $= a + 24d = -66$.........(2)

$a =$ প্রথম পদ, $d =$ সাধারণ অন্তর।

(1) এবং (2) থেকে পাই, $a = 6$, $d = -3$.

উদাহরণ ঃ 3. একটি সমান্তর প্রগতির তিনটি রাশির যোগফল 21, তাদের বর্গের যোগফল 179. রাশি তিনটি নির্ণয় করুন।

মনেকরি, $a - d$, a, $a + d$ নির্ণেয় তিনটি রাশি।

প্রশ্নানুসারে, $3a = 21$ বা, $a = 7$

আবার, $(7 - d)^2 + a^2 + (7 + d)^2 = 179$ বা $d = \pm 4$

নির্ণেয় রাশি তিনটি 3, 7, 11 বা 11, 7, 3

উদাহরণ ঃ 4. একটি সমান্তর প্রগতির p-তম, q-তম এবং r-তম রাশি যথাক্রমে x, y এবং z. প্রমাণ করুন $p(y-z)+q(z-x)+r(x-y)=0$

প্রশ্নানুসারে, $x=a+(p-1)d$

$y=a+(q-1)d$

$z=a+(r-1)d$

এখন, $p(y-z)=p(q-r)d$

$q(z-x)=q(r-p)d$

$r(x-y)=r(p-q)d$

$\therefore\ p(y-z)+q(z-x)+r(x-y)=0$

উদাহরণ ঃ 5. 3 এবং 31-এর মধ্যে তিনটি সমান্তরীয় মধ্যক বসান।

এখানে $a=3$, 5-তম পদ $=31$ বা, $3+4d=31$

বা, $4d=28$, বা, $d=7$

সুতরাং নির্ণেয় মধ্যকগুলি 10, 17, 24.

যদি $a_1, a_2, \ldots a_n$ একটি সসীম সমান্তর প্রগতি হয় তাহলে $a_1+a_2\ldots+a_n$ কে সসীম সমান্তর শ্রেণীর যোগফল বলে।

(i) **প্রথম *n*-স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল।**

মনেকরি, $S=1+2+3+\ldots+n$

এখানে $a=1,\ d=1$

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}\left[2.a+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}(n+1)\quad \therefore \boxed{S=\frac{n(n+1)}{2}}$$

(ii) প্রথম *n*-স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের যোগফল

মনেকরি, $S=1^2+2^2+3^2+\ldots+n$

এখন $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$

$n=1, 2, \ldots n$ বসিয়ে পাই

$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$

$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$

$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$

... ...

$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

যোগ করে পাই $n^3 - 0^3 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2]$

$$-3[1 + 2 + 3 + ... + n] + n$$

বা, $n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) - 3.\dfrac{n(n+1)}{2} + n$

$\therefore\ 3S = n^3 + 3n\dfrac{(n+1)}{2} - n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

সুতরাং, $\boxed{S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(iii) প্রথম স্বাভাবিক n-সংখ্যক সংখ্যায় ত্রিঘাত (cube) গুলির যোগফল।

মনেকরি, $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

আমরা জানি, $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

$n = 1, 2, ...n$ বসিয়ে পাই,

$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$

$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$

$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$

... ...

$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

যোগ করে পাই $n^4 - 0^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3)$

$$-6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + ... + n) - n$$

$= 4S - n\ (n + 1)(2n + 1) + 2n(n + 1) - n$

বা, $4S = n^4 + n\ (n + 1)(2n + 1) - 2n(n + 1) + n = n(n + 1)[n^2 - n + 1 + 2n - 1]$

$= [n(n + 1)]^2$

$\therefore\ S = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

উদাহরণ ঃ 6. n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগ করুন ঃ

$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots$

$t_n = n$-তম পদ $= n(n+1) = n^2 + n.$

$n = 1, 2, 3....n$ বসিয়ে পাই,

$t_1 = 1^2 + 1$

$t_2 = 2^2 + 2$

$t_3 = 3^2 + 3$

... .

$t_n = n^2 + n$

যোগ করে পাই $S = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore\ S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

২.৩.৪ প্রশ্নমালা

(1) **যোগফল নির্ণয় করুন ঃ**

(i) $2 + 4 + 6 + \ldots 50$-পদ পর্যন্ত। [উঃ 2550]

(ii) $4 + 5\frac{1}{4} + 6\frac{1}{2} \ldots 25$-পদ পর্যন্ত। [উঃ 475]

(iii) $1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots . n$ -পদ পর্যন্ত। [উঃ $\frac{n+1}{n}$]

(iv) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\left(1+2\sqrt{2}\right) + \ldots . 19$ -পদ পর্যন্ত। [উঃ $19\left(\sqrt{2}+18\right)$]

(v) $27 + 24 + 21 + \ldots .$ শ্রেণীটির কতগুলি পদের সমষ্টি 132 হবে?

(2) (i) k-র কোন্ মানের জন্য $2(4k + 7)$, $6k + \frac{1}{2}$, $k - 7$ একটি সমান্তর প্রগতি হবে তা নির্ণয় করুন। [উঃ $k = -\frac{3}{4}$]

(ii) কোন সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ $7n - 5$; এর প্রথম 20 টি পদের যোগফল নির্ণয় করুন।

[উঃ 1370]

(3) (i) কোন সমান্তর প্রগতির p-তম পদ q এবং q-তম p দেখান যে m-তম পদটি $p + q - m$.

(ii) সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি অখণ্ড সংখ্যার যোগফল 15 এবং তাদের গুণফল 80; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন। [উঃ 2, 5, 8, বা 8, 5, 2]

(iii) কোন সমান্তর শ্রেণীর একাদশ এবং চতুর্দশ পদদ্বয়ের অনুপাত 7 : 9 শ্রেণীটির দশম এবং তৃতীয় পদের অনুপাত নির্ণয় করুন। [উঃ 19 : 5]

(4) একটি সমান্তর শ্রেণীর 10-তম এবং 25-তম রাশিদ্বয় যথাক্রমে 50 এবং 125 এর 19-তম পদ নির্ণয় করুন। [উঃ $a = 5$, $d = 5$; 95]

(5) সমান্তর প্রগতিতে আছে এরূপ তিনটি রাশির যোগফল 15 এবং একই সঙ্গে উহাদের দুটি করে নিয়ে গুণফলগুলি যোগ করলে 71 হয়। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন।

[উঃ 3, 5, 7, বা 7, 5, 3]

(6) 1 এবং 36-এর মধ্যে এরূপ কয়েকটি সমান্তরীয় মধ্যক বসান যে, সমস্ত প্রগতিটির যোগফল 148 হয়। [উঃ 6, 11, 16, 21, 26, 31]

(7) $\frac{1}{4}$ এবং $-9\frac{3}{4}$-এর মধ্যে 19 টি সমান্তরীয় মধ্যক বসান। $\left[-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \dots\dots -9\frac{1}{4}\right]$

(8) (i) যদি a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে দেখান যে $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$, সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(ii) $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ সমান্তর প্রগতিতে থাকলে প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(9) প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করুন ঃ

(i) $2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots \rightarrow$ [উঃ $\frac{n}{3}(n^2 + 6n + 11)$]

(ii) $1.3 + 2.5 + 3.7 + \dots \rightarrow$ [উঃ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$]

(iii) $1.3^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots \rightarrow$ [উঃ $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$]

(10) কোন সমান্তর প্রগতির n-সংখ্যক পদের যোগফল $3n^2 + 5n$ ঐ সমান্তর প্রগতির কততম পদ 152? [উঃ 25-তম পদ]

(11) কোন ব্যক্তি একই সংগে দুটি চাকুরী পাওয়ার সুযোগ পেলেন। একটিতে প্রারম্ভিক বেতন 1200 টাকা এবং বাৎসরিক বৃদ্ধির হার 80 টাকা। অপরটিতে শুরু 850 টাকায়, কিন্তু বৎসরে 120 টাকা করে বৃদ্ধি পাবে। যেটিতে প্রথম 16 বৎসরে সর্বাপেক্ষা বেশী টাকা পাওয়া যাবে, সেই পদ তিনি নেবেন। তিনি কোন্ চাকুরী গ্রহণ করলেন? [উঃ প্রথম পদ]

(12) আজ 1 টাকা, আগামী কাল 2 টাকা, পরের দিন 3 টাকা এরূপে সঞ্চয় করলে 365 দিনে মোট কত টাকা সঞ্চয় করলেন? [উঃ 66795 টাকা]

(13) এক ব্যক্তি মাসিক কিস্তিতে 65 টাকা ঋণ শোধ করবার জন্য প্রথম মাসে 2 টাকা এবং প্রত্যেক পরবর্তী মাসে কিস্তিতে 1 টাকা ক'রে বাড়াতে লাগল। কত সময়ে ঐ ঋণ শোধ হবে? [উঃ 10 মাস]

(14) একটি নলকূপ বসাবার খরচ প্রথম 100 মিটারের জন্য প্রতি মিটারে 5 টাকা এবং পরবর্তী প্রত্যেক মিটারের জন্য অতিরিক্ত 2 টাকা ক'রে লাগে। 200 মি. একটি নলকূপ বসাতে তার শেষ মিটারের জন্য কত খরচ পড়বে? নলকূপটি বসাতে মোট কত খরচ পড়বে?

[উঃ 205 টাকা, 12100 টাকা]

(15) একটি অনুক্রমের n-তম পদ ঃ $a_n = 10 - 3n$; দেখান যে a_n একটি সমান্তর প্রগতির পদ।

(16) 18, 16, 14 ... সমান্তর প্রগতির কতগুলি পদের সমষ্টি শূন্য তা নির্ণয় করুন।

(17) **সমাধান করুন ঃ** $1 + 6 + 11 + \ldots + x = 148$

(18) যদি a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতির পদ হয়, দেখান যে $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ অন্য একটি সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(19) কোন স্থান থেকে যাত্রা ক'রে A প্রথম ঘণ্টায় 4 কি.মি., দ্বিতীয় ঘণ্টায় $4\frac{1}{3}$ কি.মি., তৃতীয় ঘণ্টায় $4\frac{2}{3}$ কি.মি. ; এইরূপে চলতে লাগল। তার 2 ঘণ্টা পরে B রওনা হয়ে একই দিকে ঘণ্টায় 7 কি.মি. বেগে চলল। যাত্রাস্থান থেকে কতদূরে তাদের প্রথম সাক্ষাৎ হবে? প্রথম সাক্ষাৎ হবার কত ঘণ্টা পরে A, B-কে অতিক্রম করবে? [উঃ 35 কি.মি. ; 5 ঘণ্টা পর]

(20) বিনা সুদে 480 টাকার ঋণ 20 টি সাপ্তাহিক কিস্তিতে শোধ করা হল। প্রথম 16 টি কিস্তির পর 160 টাকা বাকী ছিল। যদি প্রত্যেক কিস্তি তার ঠিক পূর্ববর্তী কিস্তি অপেক্ষা সমপরিমাণে বেশী হয়ে থাকে, তাহলে, প্রথম এবং দ্বিতীয় কিস্তিগুলো কত হবে?

[উঃ প্রথম কিস্তি—5 টাকা, দ্বিতীয় কিস্তি—7 টাকা]

২.৪ গুণোত্তর প্রগতি (Geometric Progression)

যদি কোন সংখ্যা অনুক্রমের পদগুলি এরূপ হয় যে তার যে কোন পদের সঙ্গে পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান হয় তবে এইরূপ অনুক্রমকে গুণোত্তর প্রগতি (Geometric Progression) বলে। ঐ সমান অনুপাতকে **সাধারণ অনুপাত** বলে।

যথা ; $a + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$ একটি গুণোত্তর প্রগতি। এখানে a = প্রথম পদ এবং r = সাধারণ অনুপাত। যদি $a = 1$, $r = 3$ হয় তাহলে, 1, 3, 9, 27,....গুণোত্তর প্রগতি।

২.৪.১ গুণোত্তরীয় প্রগতির প্রথম *n*-পদের যোগফল

মনেকরি, প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অনুপাত = r, এবং S নির্ণেয় যোগফল।

$\therefore S = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

$\therefore rS = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$

বিয়োগ করে পাই, $S(1-r) = a - ar^n$

বা, $\boxed{S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$ যেখানে $r \neq 1$ বা, $S = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ যখন $r > 1$

যদি $r = 1$ হয় তবে $s = a + a + \ldots + a = na.$

২.৪.২ গুণোত্তরীয় মধ্যক (Geometric Mean বা G. M)

মনেকরি, a, b, c একটি গুণোত্তরীয় প্রগতির তিনটি পদ।

$\therefore \frac{b}{c} = \frac{c}{b}$ বা, $b^2 = ac$ বা, $b = \sqrt{ac}$

b-কে a ও c-র গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

যে কোন সংখ্যক রাশি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকলে প্রথম এবং শেষ পদ দুটির অন্তবর্তী সকল পদকে ঐ দুটি প্রান্তীয় পদের গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

যথা— 1, 3, 9, 27, 81 এই প্রগতিতে, 3, 9, 27 হল 1 এবং 81-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক।

২.৪.৩ প্রগতির সাধারণ পদ

মনেকরি, কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r, তাহলে সংজ্ঞানুসারে, দ্বিতীয় পদ $= ar$, তৃতীয় পদ $= ar^2 = ar^{3-1}$

চতুর্থ পদ $= ar^3 = ar^{4-1}$, পঞ্চম পদ $= ar^4 = ar^{5-1}$

অনুরূপভাবে, n-তম পদ $= ar^{n-1}$ যদি n-তম পদকে t_n দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহলে,

$$\boxed{t_n = ar^{n-1}}$$

উদাহরণ ঃ কোন গুণোত্তর প্রগতির পঞ্চম পদ 243 এবং দ্বিতীয় পদ 9 প্রগতিটি নির্ণয় করুন।

মনেকরি, গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

$\therefore$ পঞ্চম পদ $= t_5 = ar^4 = 243....(1)$

দ্বিতীয় পদ $= t_2 = ar = 9....(2)$

$$\therefore \frac{t_2}{t_5} = \frac{ar^4}{ar} = \frac{243}{9}$$

বা $r^3 = 27 = 3^3$

বা $r = 3$

দ্বিতীয় পদ $= ar = 9$ বা $3a = 9$ বা, $a = 3$

নির্ণেয় গুণোত্তর প্রগতি, $3, 3.3, 3.3^2, 3.3^3....$

বা $3, 9, 27, 81,......$

২.৪.৪ উদাহরণমালা

উদাহরণ ঃ 1. প্রমাণ করুন যে দুটি বাস্তব অসমান ধনাত্মক রাশির সমান্তরীয় মধ্যকটি গুণোত্তরীয় মধ্যক অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ ঃ মনেকরি, a ও b দুটি ধনাত্মক অসমান রাশি।

সমান্তরীয় মধ্যক $= \dfrac{a+b}{2}$

গুণোত্তরীয় মধ্যক $= \sqrt{ab}$

এখন, $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ = ধনাত্মক রাশি $\left(\sqrt{a}\neq\sqrt{b}\right)$

$\therefore \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

উদাহরণ ঃ 2. $\frac{1}{81}+\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+....+243$ গুণোত্তরীয় প্রগতিটির যোগফল নির্ণয় করুন।

এখানে, প্রথম পদ, $a=\frac{1}{81}$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{27}\div\frac{1}{81}=3$

$243=a.r^{n-1}=\frac{1}{81}.3^{n-1}$ $\therefore$ $3^{n-1}=243\times81=3^9$

$\therefore$ $n-1=9$ বা n = 10

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল, $S=\frac{1}{81}.\frac{3^{10}-1}{3-1}=364\frac{40}{81}$

উদাহরণ ঃ 3. কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ 80 এবং 5-তম পদ 405; সাধারণ অনুপাত 3, প্রথম পাঁচটি পদের যোগফল নির্ণয় করুন।

এখানে প্রথম পদ $= a = 80$. মনেকরি, সাধারণ অনুপাত $= r$. 5-তম পদ $= 80.r^4$

প্রশ্নানুসারে, $405=80r^4$ বা, $r^4=\frac{405}{80}=\frac{3^4}{2^4}$

সুতরাং $r=\pm\frac{3}{2}$ যখন $r=\frac{3}{2}$ প্রথম পাঁচটি পদের যোগফল

$$=80+80\times\frac{3}{2}+80\times\frac{9}{4}+80\times\frac{27}{8}+\frac{80}{16}\times81$$

$$=80.\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5-1}{\frac{3}{2}-1}+80^5\times2\times\left(\frac{211}{32}\right)=1055.$$

অনুরূপে যখন $r=\frac{-3}{2}$, যোগফল $=275.$

উদাহরণ ঃ 4. প্রমাণ করুন যে গুণোত্তর প্রগতির প্রথম ও শেষ প্রান্ত হতে সমদূরবর্তী যে কোন দুটি পদের গুণফল ধ্রুবক।

মনেকরি, গুণোত্তর প্রগতির প্রথমপদ a এবং শেষপদ $l = n$-তম পদ।

$\therefore\ l = ar^{n-1}$ (r = সাধারণ অনুপাত)

$$\therefore\ a = \frac{l}{r^{n-1}},\ ar = \frac{l}{r^{n-2}},\ ...ar^{n-2} = \frac{l}{r}, l.$$

বিপরীতক্রমে লিখলে, $l, \frac{l}{r}, \frac{l}{r^2}, \cdots \frac{l}{r^{n-2}}, \frac{l}{r^{n-1}}$

প্রথম দিক থেকে p-তম পদ $= ar^{p-1}$

শেষ দিক থেকে ধরে p-তম পদ $\frac{l}{r^{p-1}}$

তাদের গুনফল $= ar^{p-1}\frac{l}{r^{p-1}}$

$= al =$ ধ্রুবক।

উদাহরণ ঃ 5. x এবং y-র মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক বসান।

এখানে প্রথমপদ $= x$ এবং শেষপদ $= y =$ প্রগতিটির পদ সংখ্যা $= (n+2)$

মনেকরি, সাধারণ অনুপাত $= r$

$$\therefore y = x.r^{n+1} \text{ এবং } r^{n+1} = \frac{y}{x};\quad \therefore\ r = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

সুতরাং নির্ণেয় মধ্যকগুলি হ'ল,

$$x.\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{n+1}},\ x.\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{n+1}},\ ....\ x.\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

উদাহরণ ঃ 6. একটি গুণোত্তর প্রগতিতে যুগ্ম সংখ্যক পদ আছে। প্রমাণ করুন যে এর মধ্যপদ দুটির গুণফল-এর প্রথম ও শেষপদের গুণফলের সমান।

মনেকরি, পদ সংখ্যা $= 2n$, প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

মধ্যপদ দুটি যথাক্রমে n-তম এবং $(n + 1)$-তম।

প্রথম পদ $=a$, শেষ পদ $= a.r^{2n-1}$

n-তম পদ $= a.r^{2n-1}$, $(n+1)$ তম পদ $= ar^{n}$

মধ্যপদ দুটির গুণফল $a,\ r^{n-1}\ ar^{n} = a^{2}r^{2n-1}$

প্রথম পদ × শেষ পদ $= a.ar^{2n-1} = a^{2}r^{2n-1}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ঃ 7. তিনটি সংখ্যার যোগফল সমান্তর শ্রেণীতে হয়, যদি সংখ্যা তিনটির সাথে যথাক্রমে 1, 4, এবং 19 যোগ করা হয় তবে তা গুণোত্তর শ্রেণী হয়। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন।

মনেকরি, সংখ্যা তিনটি $a-d,\ a,\ a+d$

প্রশ্নানুসারে $a-d+a+a+d = 15$ বা $3a = 15$

বা, $a = 5$ আবার, $5-d+1,\ 5+4,\ 5+d+19$ গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে।

সুতরাং $(6-d)\ (24+d) = 81\ \therefore\ d = -21,$ বা 3

যখন $d = 3$ সংখ্যা তিনটি, 2, 5, 8

যখন $d = -21$, সংখ্যা তিনটি $-26,\ 5,\ -16$

উদাহরণ ঃ 8. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots 20$-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় করুন।

প্রথম পদ $= a = 1$ সাধারণ অনুপাত $= r = \frac{1}{2}$

$$\therefore S_{20} = \frac{a\left(1-r^{20}\right)}{1-r} = 1\cdot\frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right) = 2-\frac{1}{219}$$

২.৪.৫ প্রশ্নমালা

(1) **যোগফল নির্ণয় করুন ঃ**

(i) $5 + 55 + 555 + ...n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত। [উঃ $\frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$]

(ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}$ 6-তম পর্যন্ত। [উঃ $\frac{\sqrt{2}}{32}, \frac{63\sqrt{2}}{32}$]

(iii) $64 + 32 + 16 + 8 + ... 4$ এই শ্রেণীর কতগুলি পদের সমষ্টি $127\frac{1}{2}$ হবে। [উঃ 8 টি]

(iv) $\cdot 2 + \cdot 02 + \cdot 002 + .0002 + ...n$-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$]

(v) $\cdot 2 + \cdot 22 + \cdot 222 + ...n$-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{2n}{9} - \frac{2}{81}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$]

(2) গুণোত্তরীয় প্রগতিতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যার যোগফল 26 এবং তাদের গুণফল 216. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন। [উঃ (2, 6, 18) বা (18, 6, 2)]

(3) গুণোত্তরীয় তিনটি পদের যোগফল 14, যদি প্রথম দুটি পদের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ করা হয় এবং তৃতীয়টি থেকে 1 বিয়োগ করা হয় তবে নতুন সংখ্যা তিনটি সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকে। গুণোত্তরীয় তিনটি পদ নির্ণয় করুন। [উঃ (2, 4, 8) বা (8, 4, 2)]

(4) 9 এবং 576-এর মধ্যে পাঁচটি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসান।[উঃ 18, 36, 72, 144, 288]

(5) যদি a, b, c গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকে তবে দেখান যে $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে।

(6) এক ব্যক্তি বিনা সুদে 8190 টাকা ধার করলেন এবং 12 টি মাসিক কিস্তিতে ধার শোধ করলেন। যদি প্রতিটি কিস্তির টাকা পূর্বের কিস্তির দ্বিগুণ হয় তবে প্রথম কিস্তি ও শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় করুন। [উঃ 2 টাকা ও 4096 টাকা]

(7) 40 মি. উচ্চতা থেকে একটি বলকে মাটিতে ফেলা হ'ল। প্রত্যেকবার মাটি স্পর্শ করবার পর বলটির পূর্বের উচ্চতার $\frac{3}{5}$ অংশ হ্রাশ পায়। বলটি পঞ্চমবার ভূমি স্পর্শ করলে মোট কত পথ অতিক্রম করবে? [উঃ $86\frac{26}{125}$]

(8) যদি $Sn = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$ হয়, তবে n-এর মান কমপক্ষে কত হলে $Sn > 1.99$

(a) $(1) + (1 + 3) + (1 + 3 + 3^n)...10$ তম পদ এর সমষ্টি নির্ণয় করুন।

(b) কোন শ্রেণীর r-তম পদ $2r + \frac{1}{2^r}$ হলে উহার প্রথম সংখ্যার পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

(9) যদি a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে এবং $a^x = b^y = c^z$ হয়, তবে দেখান যে $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(10) যদি কোন গুণোত্তরীয় প্রগতির n-টি পদের যোগফল S, গুণফল P এবং পদসমূহের অন্যোন্যকগুলির যোগফল R হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\left(\frac{S}{R}\right)^n = P^2$

(11) কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম, দ্বিতীয় ও শেষ পদ যথাক্রমে a, b, l দেখান যে প্রগতিটির যোগফল $\frac{bl - a^2}{b - a}$

(12) দুইটি সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক 15 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 9 ; সংখ্যা দুটি নির্ণয় করুন।

[উঃ 27, 3]

(13) যদি a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকে এবং x, y, z গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, তবে দেখান যে, $x^{b-c}, y^{c-a}, z^{a-b} = 1$

(14) সমান্তর শ্রেণীভূক্ত তিনটি সংখ্যার যোগফল 15 ; যদি প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সংখ্যার সহিত 1, 4, 19 যোগ করা হয়, তবে উৎপন্ন সংখ্যা তিনটি গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন।

[উঃ 2, 5, 8 ; বা 26, 5, –16]

(15) $\frac{3}{49}$ এবং 147-এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তরীয় মধ্যক স্থাপন করুন।

[উঃ $\frac{3}{7}$, 3, 21 বা $-\frac{3}{7}$, 3, –21]

(16) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম 8 টি পদের সমষ্টি, প্রথম 4 টি পদের সমষ্টির পাঁচগুণ। সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করুন।

[উঃ $\pm\sqrt{2}$]

(17) গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত তিনটি সংখ্যার গুণফল 216। যদি প্রথমটির সাথে 4, এবং দ্বিতীয়টির সাথে 6 যোগ করা হয়, তবে উৎপন্ন সংখ্যাত্রয় সমান্তর প্রগতিতে থাকে। গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত সংখ্যাত্রয় নির্ণয় করুন। [**উঃ** 2, 6, 18 বা 18, 6, 2]

(18) যদি a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী এবং b, c, a একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে দেখান যে, $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

(19) এক ব্যক্তি 6000 টাকা ধার করেন এবং মোট সুদ 138 টাকা সমেত 10 টি মাসিক কিস্তিতে সুদ সমেত সব টাকা শোধ করতে রাজী হন। তাঁর প্রত্যেক কিস্তির টাকা পূর্ববর্তী কিস্তির দ্বিগুণ হয়। দ্বিতীয় ও শেষ কিস্তির টাকা নির্ণয় করুন। [**উঃ** 12 টাকা এবং 3072 টাকা]

২.৫ বিপরীত প্রগতি (Harmonic Progression–H.P.)

যদি কোন প্রগতির রাশিগুলির অন্যোন্যকগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে ঐ রাশিগুলি বিপরীত প্রগতি গঠন করে। যথা, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ বিপরীত প্রগতিতে আছে কারণ এদের অন্যোন্যকগুলি 2, 4, 6, 8 সমান্তর প্রগতিতে আছে।

২.৫.১ বিপরীত মধ্যক (Harmonic Mean)

যদি a, b, c বিপরীত প্রগতিতে থাকে তবে মধ্যপদ b-কে a ও c র বিপরীত মধ্যক বলে।

২.৫.২ উদাহরণমালা

উদাহরণ ঃ 1. a এবং b-এর বিপরীত মধ্যক নির্ণয় করুন।

মনেকরি, নির্ণেয় মধ্যক H, অতএব a, H, b বিপরীত প্রগতিতে আছে। সুতরাং $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে। অর্থাৎ—

$$\frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H} \text{ বা } \frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab} \qquad \boxed{\therefore H=\frac{2ab}{a+b}}$$

উদাহরণ ঃ 2. 10 এবং 20-র মধ্যে তিনটি বিপরীত মধ্যক বসান।

এখানে অনুরূপ সমান্তরীয় প্রগতির প্রথম পদ $=\frac{1}{10}$ সাধারণ অন্তর d হলে $\frac{1}{10}+4d=\frac{1}{20}$

বা, $d=-\frac{1}{80}$ সুতরাং বিপরীত মধ্যকগুলি $\frac{1}{\frac{1}{10}-\frac{1}{80}}=\frac{80}{7}$ ইত্যাদি।

উদাহরণ ঃ 3. দুটি ধনাত্মক সংখ্যা নির্ণয় করুন যাদের সমান্তরীয় মধ্যক 10 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 8। সংখ্যা দুটির বিপরীত মধ্যকও নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনেকরি সংখ্যা দুটি x এবং y, প্রশ্নানুযায়ী, $\frac{x+y}{2}=10$......(1) এবং $\sqrt{xy}=8$......(2)

(2) থেকে পাই $xy = 64$ বা, $y = 64/x$ y-এর মান (1)-এ বসিয়ে পাই $x + 64/x = 20$ বা,

$x^2 - 20x + 64 = 0$ বা $(x - 16)(x - 4) = 0$

$\therefore\ x = 16$ বা 4, $\therefore\ y = 4$ বা 16, $\therefore$ সংখ্যা দুটি 16 ও 4।

এদের বিপরীত মধ্যক $= H = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2.64}{20} = 6.4$

উদাহরণ ঃ 4. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}$ .... বিপরীত প্রগতিটির 20-তম পদ নির্ণয় করুন।

এখানে 3, 6, 9, 12 সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে।

সাধারণ অন্তর $d = 3$, প্রথম পদ $= 3$

20তম পদ $= 3+(3\times19)=60$.

সুতরাং বিপরীত প্রগতির 20-তম পদ $= \frac{1}{60}$

দ্রষ্টব্য ঃ বিপরীত প্রগতির রাশিগুলির যোগফল নির্ণয় করার কোন সহজ পদ্ধতি নাই।

উদাহরণ ঃ 5. দুটি ধনাত্মক অসমান রাশি x, y এবং তাদের A. M, G. M, এবং H.M যথাক্রমে A, G, H. প্রমাণ করুন যে

(i) $AH = G^2$ এবং (ii) $A > G > H$.

এখানে $A = \frac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$, $H = \frac{2xy}{x+y}$

(i) $AH = \frac{x+y}{2} \cdot \frac{2xy}{x+y} = xy = G^2$

(ii) $A > G$ পূর্বে প্রমাণ করা হয়েছে।

এখন, $G - H = \sqrt{xy} - \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x+y)\sqrt{xy} - 2xy}{x+y}$

$$= \frac{\sqrt{xy}}{x+y}\left(x + y - 2\sqrt{xy}\right) = \frac{\sqrt{xy}}{x+y}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 > 0$$

সুতরাং $G > H$. অর্থাৎ $A > G > H$.

উদাহরণ ঃ 6. যদি a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে এবং $a^x = b^y = c^z$ হয় প্রমাণ কর যে, x, y, z বিপরীত প্রগতিতে থাকবে।

সমাধান ঃ $a^x = b^y = c^z = k$ (মনে করি) $\therefore a = k^{1/x}; \ b = k^{1/y}; \ c = k^{1/2}; ...(1)$

$\because a, b, c$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে, $\therefore b^2 = ac.....(2)$ হবে।

a, b, c-র মান (1) থেকে (2)-এ বসিয়ে পাই,

$\left(k^{1/y}\right)^2 = k^{1/x}, k^{1/z}$ বা, $k^{2/y} = k^{1/x + 1/y}$

$\therefore \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$\therefore x, y, z$ বিপরীত প্রগতিতে আছে।

২.৫.৩ প্রশ্নমালা

(1) বিপরীত প্রগতি $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10} ... ...$ এর 15-তম পদ নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{1}{46}$]

(2) $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{64}$-এর মধ্যে চারটি বিপরীত মধ্যক বসান। [উঃ $\frac{1}{16}, \frac{1}{28}, \frac{1}{40}, \frac{1}{52}$]

(3) যদি x এবং y-এর গুণোত্তরীয় এবং বিপরীত মধ্যক যথাক্রমে 12 এবং $9\frac{3}{5}$ হয়, তবে x ও y নির্ণয় করুন। [উঃ $x = 24, \ y = 6$]

(4) দুটি রাশি a এবং b এরূপে যে $H.M : G.M = \frac{12}{13}$

প্রমাণ করুন যে $a : b = 4 : 9$

(5) যদি a এবং c-র বিপরীত মধ্যক b হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$।

(6) যে সকল তিন অংক বিশিষ্ট সংখ্যাকে 3 দ্বারা ভাগ করলে 2 অবশিষ্ট থাকে তাদের যোগফল নির্ণয় করুন। [উঃ 164850]

(7) **সমাধান করুন** ঃ $5^2, 5^4, 5^6 \ldots 5^{2x} = (0{\cdot}04)^{-28}$ অর্থ কী? [উঃ 7]

(8) একটি সমান্তর প্রগতির চারটি ক্রমিক পদের যোগফল 1 এবং পদগুলির বর্গের সমষ্টি 0·3 পদগুলি নির্ণয় করুন। [উঃ 0·1, 0·2, 0·3, 0·4]

(9) একটি গুণোত্তর অণুক্রম-এর চতুর্থ পদ দ্বিতীয় পদ অপেক্ষা 24 বেশী এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের যোগফল 6. অণুক্রমটি নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{1}{5}$, 1, 5, 25]

(10) $5x - y$, $2x + y$ এবং $x + y$ সংখ্যাগুলি একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে এবং $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ সংখ্যাগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে। x ও y-এর মান নির্ণয় করুন।
[উঃ $x = 0$, বা, $y = 0$, বা, $x = \frac{10}{3}$, $y = 4/3$, বা, $x = -\frac{3}{4}$, $y = -\frac{3}{10}$]

২.৬ অসীম শ্রেণী (Infinite Series)

পূর্বে সমান্তর শ্রেণী, গুণোত্তর শ্রেণী ইত্যাদির n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করা হয়েছে। যদি কোন শ্রেণীর পদ সংখ্যা অসীম হয় তবে সেই শ্রেণীকে **অসীম শ্রেণী** বলে।

যথা $a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots \infty$ (অসীম কে ∞ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়), অসীম শ্রেণীটিকে লেখা হয় $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ।

সসীম শ্রেণীর, যা পূর্বে আলোচিত হয়েছে, পদসংখ্যা সসীম বলে পরপর পদগুলি যোগ ক'রে যোগফল নির্ণয় করা যায়। অসীম শ্রেণীর পদসংখ্যা সীমিত নয়, তাই যোগ প্রক্রিয়া কখনই শেষ হবে না। সুতরাং অসীম শ্রেণীর মান পরিচিত যোগ প্রক্রিয়ায় পাওয়া যাবে না। অসীম শ্রেণীর যোগফলের একটি বিশেষ অর্থ প্রদান করতে হবে।

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n + \ldots \infty$ একটি অসীম শ্রেণী। প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$। S_n কে বলা হয় n-তম আংশিক যোগফল। এখন পদসংখ্যা অর্থাৎ n-এর

মান যদি অসীম-এর দিকে অগ্রসর হয় এবং সে ক্ষেত্রে S_n-এর সীমান্থ মান যদি একটি সসীম রাশি S হয় তবে ঐ শ্রেণীটিকে অভিসারী শ্রেণী (Convergent Series) বলা হয়। S-কে ঐ অসীম শ্রেণীর যোগফল বলা হয় এবং লেখা হয় $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ অর্থাৎ $a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots\infty = S$ বা $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$

উদাহরণ ঃ 1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\infty$ এর যোগফল নির্ণয় করুন।

এখানে $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ এটি একটি সসীম গুণোত্তর শ্রেণী যার সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{2}$।

$\therefore\ S_n = \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ এখন n এর মান যত বৃদ্ধি পায় $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ তত ছোট হয় অর্থাৎ $\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\therefore\ \lim_{n \to \infty} S_2 = 2$ অর্থাৎ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\infty = 2$

২.৬.১ অভিসারী ও অপসারী অসীম শ্রেণী

যদি কোন অসীম শ্রেণী $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\infty$-এর কোন নির্দিষ্ট সসীম যোগফল থাকে তবে ঐ অসীম শ্রেণীকে অভিসারী (Convergent) বলা হয়।

উদাহরণ ঃ 1. এর অসীম শ্রেণীটি অভিসারী।

যদি $\lim_{n \to \infty} S_n$ অসীম হয় ($+\infty$ বা $-\infty$) তবে অসীম শ্রেণীটিকে অপসারী (Divergent) বলে। অর্থাৎ এইক্ষেত্রে কোন সসীম যোগফল থাকে না।

উদাহরণ ঃ 2. $1 + 2 + 3 + \ldots\infty$ প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

এখানে $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ দেখা যাচ্ছে যে, n এর মান যত বৃদ্ধি পাবে S_n এর মানও তত বৃদ্ধি পেতে থাকবে। অর্থাৎ $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$

সুতরাং উপরের শ্রেণীটি অপসারী এবং এর যোগফল নির্ণয় করা যায় না।

উদাহরণ ঃ 3. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\infty$ প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

এখানে $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n$

$= 0$, যখন n যুগ্ম সংখ্যা

$= 1$, যখন n অযুগ্ম সংখ্যা

$\therefore \lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$ বা 1 অর্থাৎ কোন নির্দিষ্ট মান নেই।

এক্ষেত্রে বলা হয় শ্রেণীটি 0 এবং 1-এর মধ্যে দোলায়মান (oscillatory)।

২.৬.২ অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর প্রকৃতি

$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ এর প্রকৃতি

এখানে $S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1} = a\dfrac{1-r^n}{1-r}\ (r \neq 1)$

(a) যদি $|r| < 1$ হয় অর্থাৎ $-1 < r < 1$ হয় তবে $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$ হবে।

অতএব $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা। সুতরাং প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর শ্রেণীটি অভিসারী এবং এর যোগফল $\dfrac{a}{1-r}$ যখন $-1 < r < 1$.

(b) আবার যখন $|r| > 1$ হবে তখন $n \to \infty$ হলে $r^n \to \infty$ হবে।

সুতরাং $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$ অতএব গুণোত্তর শ্রেণীটি অপসারী হবে যখন $r > 1$ হবে।

(c) আবার যখন $r = 1$, আমরা পাই $a + a + a + \ldots$ অর্থাৎ $S_n = a + a + \ldots a = na$ সুতরাং $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$ অতএব শ্রেণীটি অপসারী।

(d) যখন $r = -1$, শ্রেণীটি হয় $a + a + a - a \ldots \infty$

$S_n = a - a + a - a + \ldots + (-1)^n a = 0$ বা a

যখন n যুগ্ম বা অযুগ্ম। অর্থাৎ এক্ষেত্রে শ্রেণীটি 0 এবং a-র মধ্যে দোলায়মান।

(e) যখন $r < -1$ তখন $n \to \infty$ হ'লে, $S_n \to \pm\infty$, সুতরাং শ্রেণীটি অসীমভাবে দোলায়মান। কারণ n যুগ্ম হলে $r^n \to +\infty$ এবং n অযুগ্ম হ'লে $r^n \to -\infty$ হবে।

সুতরাং অসীম গুণোত্তর শ্রেণী $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...\infty$

(i) অভিসারী, যখন $|r| < 1$ বা $-1 < r <|$

(ii) অপসারী যখন $|r| > 1$ বা $r > 1$ এবং যখন $r = 1$

(iii) দোলায়মান, যখন $r = -1$, এবং $r < -1$

উদাহরণ ঃ 4. যোগফল নির্ণয় করুন ঃ $\cdot 4 + \cdot 04 + \cdot 004 + ... \infty$

প্রদত্ত শ্রেণী $= \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + ...$

$= \frac{4}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ...\right)$ একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী।

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর সমষ্টি $= \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{9}$.

উদাহরণ ঃ 5. এক ব্যক্তি বাৎসরিক কিস্তিতে টাকা পাওয়ার অধিকারী। প্রত্যেক কিস্তির টাকা তার ঠিক পূর্ববর্তী কিস্তি অপেক্ষা এক দশমাংশ কম। যদি প্রথম কিস্তির মূল্য 800 টাকা হয় তবে দেখান যে ঐ ব্যক্তি যত বৎসরই বাঁচুন না কেন তিনি 8000 টাকার বেশী পাবেন না।

এখানে প্রথম কিস্তি = 800 টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় কিস্তি $= 800 - \frac{1}{10} \times 800 = 720$

তৃতীয় কিস্তি $= 720 - \frac{1}{10} \times 720 = 720 - 72 = 648$

সুতরাং কিস্তিগুলি 800, 720, 648, ...

$\therefore$ ব্যক্তিটির মোট পাওনা $800 + 720 + 648 + ...$

ইহা একটি গুণোত্তরীয় অসীম শ্রেণী এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{9}{10} < 1$

$\therefore$ যোগফল $= \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \times 800 = 8000.$

২.৬.৩ একটি প্রয়োজনীয় অসীম শ্রেণী

$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$ এই অসীম শ্রেণীটি

(i) অভিসারী, যখন $p>1$

(ii) অপসারী, যখন $p \leq 1$ এই শ্রেণীটিকে p শ্রেণী বলে।

উদাহরণ ঃ 6. প্রকৃতি নির্ণয় করুন ঃ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\infty$

p-শ্রেণীতে $p=1$ বসিয়ে এই শ্রেণীটি পাওয়া যায়। এখানে $p=1$ সুতরাং শ্রেণীটি অপসারী।

২.৭ অনুশীলনী

1. **যোগফল নির্ণয় করুন ঃ**

(i) $1+\frac{1}{1\cdot04}+\frac{1}{(1\cdot04)^2}+\ldots$ [উঃ 26]

(ii) $0\cdot9+\cdot81+\cdot729+\ldots$ [উঃ 9]

2. কোন অসীম গুণোত্তরীয় শ্রেণীর প্রত্যেক পদ তার পরবর্তী সকল পদের যোগফলের দ্বিগুণ। প্রথম পদটি 2 হলে শ্রেণীটি নির্ণয় করুন। [উঃ $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}\ldots\left(r=\frac{1}{3}\right)$]

3. কোন অসীম গুণোত্তরীয় শ্রেণীর যোগফল 2 এবং তার পদগুলির বর্গের যোগফল $\frac{4}{3}$। প্রথম পদটি নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{8}{3}$]

4. যোগফল নির্ণয় করুন ঃ $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots$ [উঃ $\frac{13}{24}$]

5. কোন অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল 1·6 এবং দ্বিতীয় পদটি –0·5। প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় করুন। [উঃ $2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$]

6. নিম্নলিখিত আবৃত্ত দশমিকগুলির প্রত্যেকটিকে মূলদ সংখ্যায় প্রকাশ করুন।

(i) $0\cdot5\dot{3}$ (ii) $0\cdot\dot{3}\dot{6}$ (iii) $2\cdot0\dot{2}\dot{5}$

7. S_1, S_2, S_3....S_n যদি n-সংখ্যক অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল হয়, যাদের প্রথম পদ যথাক্রমে 1, 2, 3...n এবং সাধারণ অনুপাত যথাক্রমে $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{n+1}$,

তবে দেখান যে $S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_2 = \frac{n(n+3)}{2}$

8. নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণীসমূহ অভিসারী অথবা অপসারী নির্ণয় করুন।

(i) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + ...$ অসীম পর্যন্ত। [উ ঃ অভিসারী]

(ii) $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{7^3} + ...\infty$ [উ ঃ অভিসারী]

(iii) $2 + 2 + 2 + 2 + ...\infty$ [উ ঃ অপসারী]

(iv) $3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + ...\infty$ [উ ঃ দোদুল্যমান]

9. কোন অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল 15 এবং তার পদগুলির বর্গের যোগফল 45 শ্রেণীটি নির্ণয় করুন।

[**সংকেত ঃ** শ্রেণীটি a, ar, ar^2 ...∞

শ্রেণীটির পদগুলির বর্গ $(a)^2$, $(ar)^2$, $(ar^2)^2$...∞

$\therefore \frac{a}{1-r} = 15$ এবং $\frac{a^2}{1-r^2} = 45$]

একক ৩ ❑ চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) এবং বার্ষিকী (Annuities)

গঠন

৩.১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন—

- সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন এবং এই দুই ধরনের সুদের রাশিমালাগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।
- আসল, দুই ধরনের হার ও সুদের পরিমাণ সম্পর্কিত প্রশ্নগুলির সমাধান করতে পারবেন।
- বার্ষিক বৃত্তির পরিমাণ ও বর্তমান মূল্যের হিসাব করতে পারবেন।

৩.২ চক্রবৃদ্ধি সুদ কী

কোন ব্যক্তি বা সংস্থা থেকে অর্থ ঋণ নিলে ঋণগ্রহিতা ঐ অর্থ আপন প্রয়োজনে ব্যবহার করার জন্য উক্ত ব্যক্তি বা সংস্থাকে প্রতিশ্রুতিমত কিছু অতিরিক্ত অর্থ প্রদান করে। এই অতিরিক্ত অর্থকে সুদ (Interest) এবং ঋণকৃত অর্থকে আসল (Principal) বলে। সাধারণত সুদ স্থিরিকৃত সমান সময়ের ব্যবধানে দেওয়া হয়ে থাকে। সুদ বৎসরান্তে, প্রতি ছয় মাস অন্তে বা তিন মাস অন্তে ইত্যাদি দেওয়া হয়ে থাকে। সময়ের

উল্লেখ না থাকলে ব্যবধান 1 বৎসরের ধরা হয়। একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর যে নির্দিষ্ট পরিমাণ সুদ দেওয়া হয় তাকে সুদের হার বলে। যখন শুধু আসলই সুদ উৎপন্ন করে তখন সেই সুদকে সরল সুদ বলে। সুদ এবং আসলের সমষ্টিকে সবৃদ্ধিমূল বলে। যখন প্রতি নির্দিষ্ট সময় অন্তর পরবর্তী নির্দিষ্ট সময়ের জন্য সবৃদ্ধিমূলের উপর সুদ নির্ধারিত হয় তখন তাকে চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) বলে।

৩.৩ সরল সুদের সূত্র

মনে করি, আসল = P_0, সুদের শতকরা বার্ষিক হার (অর্থাৎ 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ) = r, বৎসর সংখ্যা = n এবং n বৎসর পর সুদ + আসল = P_n.

P_0 টাকার n বৎসরের সুদ (বার্ষিক হার r) = $\frac{P_0 rn}{100}$

$$\therefore\ P_n = P_0 + \frac{P_0 rn}{100}$$

বা, $\boxed{P_n = P_0\left(1+\frac{rn}{100}\right)}$

৩.৪ চক্রবৃদ্ধি হারের সূত্র

1 বৎসর পরে সুদ-আসল (সরল সুদের সূত্র থেকে) = $P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$

2য় বর্ষে আসল = $P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$ এবং সুদ $P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100}$

$\therefore$ 2য় বর্ষে সুদ-আসল = $P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)+P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100}$

$$= P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

অনুরূপে n বৎসর পরে সুদ-আসল $\boxed{P_n = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$ ....(1)

যদি কোন রাশির (বা বস্তুর) মান r% হারে কমে, তবে n বৎসর পরে মান, $P_n = P_0\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

দ্রষ্টব্য : P-এর একক টাকা না হয়ে অন্য কোন একক হলেও সূত্রটি সত্য।

পূর্ব পৃষ্ঠার সূত্র থেকে পাই $\boxed{P_0 = P_n\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}}$ ....(2)

(1) অনুসারে P_0 পরিমাণ টাকা n বৎসর পরে P_n পরিমাণ টাকায় পরিণত হয়, সুতরাং P_0কে, P_n পরিমাণ টাকার বর্তমান মূল্য (Present Value) বলে। (2) বর্তমান মূল্য নির্ণয়ের সূত্র।

যদি সুদ বৎসরান্তে আসলের সাথে যুক্ত না হয়ে 6 মাস অন্তর, 3 মাস অন্তর বা 1 মাস অন্তর আসলের সাথে যুক্ত হয় এবং i = 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ হয়—

$P_n = P_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$, যেখানে $i = \frac{r}{100}$

[সুদ ছয় মাস অন্তর আসলের সাথে যুক্ত হলে]

$P_n = P_0\left(1+\frac{i}{4)}\right)^{4n}$, সুদ তিন মাস অন্তর আসলের সাথে যুক্ত হলে।

$P_n = P_0\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n}$, সুদ এক মাস অন্তর আসলের সাথে যুক্ত হলে।

৩.৪.১ উদাহরণ মালা

উদা. 1. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হারে 12 বৎসর পরে 200 টাকা সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে?

এখানে P_0 = 200 টাকা, r = 8, n = 12 বৎসর।

$\therefore p_n = P_{12} = P_0\left(1+\frac{r}{100)}\right)^n = 200\left(1+\frac{8}{100}\right)^{12} = 200\times(1{\cdot}08)^{12}$

$\therefore \log P_{12} = \log 200 + 12\log 1{\cdot}08$

$= \log 2\times 10^2 + 12\log 1{\cdot}08 = \log 2 + 2\log_{10}10 + 12\log 1{\cdot}08$

$= {\cdot}3010 + 2 + 12\times{\cdot}0334$

$= 2{\cdot}3010 + 12\times{\cdot}0334 = 2{\cdot}7018$

$\therefore P_{12}$ = অ্যান্টিলগ (2·7018) = 503·2

নির্ণেয় সমূল-চক্রবৃদ্ধি = 503·20 টাকা।

উদা. 2. কী হারে কোন টাকা 15 বৎসরে তিনগুণ হবে যদি সুদ 3 মাস অন্তর দেওয়া হয়?

মনে করি আসল টাকার পরিমাণ P_0 এবং বার্ষিক সুদের হার r%.

এখানে $n = 15$ এবং $P_{15} = 3P_0$.

$$\therefore \text{ প্রশ্নানুসারে, } P_{15} = 3P_0 = P_0\left(1+\frac{r}{100\times 4}\right)^{60}$$

$$\text{বা, } 3 = \left(1+\frac{r}{400)}\right)^{60}$$

$$\text{বা, } \log 3 = 60\log\left(1+\frac{r}{400}\right)$$

$$\text{বা, } \log\left(1+\frac{r}{400}\right) = \frac{\log 3}{60} = \frac{0{\cdot}4771}{60} = 0{\cdot}007952$$

$$\text{বা, } 1+\frac{r}{400} = \text{অ্যান্টিলগ } (0{\cdot}007952)$$

$$= 1{\cdot}01848$$

বা, $r = 400 \times 0{\cdot}01848 = 7{\cdot}4$ (প্রায়)

$\therefore$ বার্ষিক সুদের হার $7{\cdot}4\%$

উদা. 3. কত টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 4% বার্ষিক হারে 18 বৎসরে 10,000 টাকা হবে?

এখানে $P_{18} = 10{,}000$ টাকা, $r = 4$, $n = 18$ বৎসর, $P_0 = ?$

$$\therefore 10{,}000 = P_0\left(1+\frac{4}{100}\right)^{18} = (1{\cdot}04)^{18}$$

$\therefore \quad \log 10^4 = \log P_0 + 18 \log 1{\cdot}04$

বা, $4 = \log p_0 + 18 \times {\cdot}0170 = \log P_0 + {\cdot}3060$

বা, $\log p_0 = 3{\cdot}6940$.

$\therefore$ P_0 = অ্যান্টিলগ $(3{\cdot}6940) = 4943$ টা. (প্রায়)।

উদা. 4. যদি সুদ 6 মাস অন্তর দেওয়া হয়, তবে বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত টাকা 8 বৎসরে সুদে-আসলে 1000 টাকা হবে?

মনে করি আসল টাকার পরিমাণ P_0.

দেওয়া আছে $n = 8$, $r = 5$ এবং $P_8 = 1000$.

$\therefore P_8 = 1000 = P_0\left(1+\frac{5}{100\times 2}\right)^{2\times 8}$

বা, $P_0\ (1\cdot025)^{16} = 1000$

বা, $\log P_0 + 16 \times \log(1\cdot025) = \log 10^3$

বা, $\log P_0 + 0\cdot17158 = 3$

বা, $\log P_0 = 2\cdot82842$

বা, $P_0 =$ অ্যান্টিলগ $(2\cdot82842) = 673\cdot60$ (প্রায়)

$\therefore$ আসল টাকার পরিমাণ $673\cdot60$ টাকা।

উদা. 5. সুদ বৎসরান্তে দেয় এইরূপ চক্রবৃদ্ধিতে লগ্নী করার ফলে কোন টাকার দ্বিতীয় বৎসর অন্তে 2704 টাকা এবং তৃতীয় বৎসর অন্তে 2812 টা. 16 প. সমূল চক্রবৃদ্ধি হয়। সুদের হার এবং মূলধন নির্ণয় করুন।

প্রশ্নানুসারে, $2704 = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ এবং $2812.16 = P_0\left(1+\frac{r}{100)}\right)^3$

$\therefore \frac{2812\cdot16}{2704} = 1+\frac{r}{100}$ বা, $1\cdot04 = 1+\frac{r}{100}$

বা, $r = 100 \times \cdot04 = 4\%$ উপরের যে কোন একটিতে r-এর মান বসিয়ে পাই $P_0 = 2500$ টাকা।

উদা. 6. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত সময়ে সবৃদ্ধিমূল আসলের দ্বিগুণ হবে?

এখানে $P_0 = 2P_0$, $r = 5$, $n =$ নির্ণেয় বৎসর।

$\therefore 2P_0 = P_0\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$

বা, $2 = (1\cdot05)^n$ বা, $\log 2 = n\log 1\cdot05$

বা, $\cdot3010 = n \times \cdot0212$ বা, $n = \frac{3010}{212} = 14\cdot2$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 7. একটি যন্ত্রের আয়ু 10 বৎসর এবং ক্রয়মূল্য 10,000 টাকা। যদি প্রতি বৎসর 10% হারে অবচয় হয়, তবে 10 বৎসর পরে যন্ত্রটির মূল্য কত হবে?

যেহেতু চক্রবৃদ্ধি হারে মূল্য কমছে সুতরাং $P_n = P_0\left(1-\frac{10}{100)}\right)^{10} = 10000\times(1-1)^{10} = 10000\times(\cdot9)^{10}$

$\therefore \log P_n = \log 10^4 + 10\log .9 = 4 + 10 \times (-1 + \cdot9542) = 3\cdot542$

$\therefore\ P_n$ = অ্যান্টিলগ (3·542) = 3483 টাকা (প্রায়)।

উদা. 8. কোন রাজ্যের লোক সংখ্যার বাৎসরিক বৃদ্ধি প্রতি হাজারে 25 এবং বর্তমান লোক সংখ্যা 26,24,000। 3 বৎসর পরে লোক সংখ্যা কত হবে? এক বৎসর পূর্বে তা কত ছিল?

এখানে $p_o = 26{,}24{,}000,\ n = 3,\ r = 2.5,\ P_n = ?$

আমরা জানি, $P_n = 26{,}24{,}000\left(1+\frac{2\cdot 5}{100}\right)^3$

$$= 2624 \times 10^3 \times (1\cdot 025)^3$$

$\therefore \log P_n = 3 + \log 2624 + 3\log 1\cdot 025$

$$= 3 + 3\cdot 4190 + 3 \times \cdot 0107 = 6\cdot 4511$$

P_n = অ্যান্টিলগ (6·4511) = 28,26,000.

মনে করি, এক বৎসর আগে ঐ রাজ্যের লোকসংখ্যা ছিল P_{-1}

এখন, $P_0 = P_{-1}(1 + \cdot 025)$

$$\therefore P_{-1} = \frac{p_0}{1\cdot 025} = \frac{2624000}{1\cdot 025} = 25{,}60{,}000$$

উদা. 9. কোন ব্যক্তি টাকা প্রতি বাৎসরিক r টাকা হার সুদে P টাকা ধার করল। যদি প্রতি বৎসর সে ঐ বৎসরের সুদ এবং ঐ সুদের সমপরিমাণ আসল শোধ করে তবে দেখান যে n বৎসর পরে তার ধার থাকবে $P(1 - r)^n$ টাকা।

প্রথম বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ $P_1 = P(1 - r)$

দ্বিতীয় বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ $P_2 = P(1 - r) - P(1 - r).r$

$$= P(1 - r)(1 - r)$$

এইভাবে মনে করি x বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ P_x এবং $x + 1$ বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ P_{x-1}

এখন, $P_{x+1} = P_x - P_x.r = P_x(1 - r)$

$$\therefore\ P_n = (1 - r).\ p_{n-1}$$
$$P_{n-1} = (1 - r)\ P_{n-2}$$
$$P_{n-2} = (1 - r)P_{n-3}$$
$$P_2 = (1 - r)P_1$$
$$P_1 = P(1-r)$$
$$\therefore\ P_n = (1 - r)^n P.$$

৩.৫ বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্তি (Annuities)

৩.৫.১ বার্ষিক বৃত্তির সংজ্ঞা (Annuities)

কোনও শর্তাধীনে প্রতি বৎসর অন্তর দেয় কোনও নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থকে বার্ষিকী বলে। যে সামগ্রিক সময়ের জন্য বার্ষিকী দেওয়া হয় তাকে মেয়াদ বলে। এই মেয়াদ কয়েক বৎসর হতে পারে, আবার চিরকালও হতে পারে।

বার্ষিক বৃত্তির মেয়াদ যদি অসীম হয় তবে কিস্তির সংখ্যাও অসীম হবে অর্থাৎ কোন কিস্তিই শেষ কিস্তি নয়, একে চিরস্থায়ী কিস্তি বলে।

৩.৫.২ বার্ষিক বৃত্তির সূত্র

বার্ষিক বৃত্তি P যদি n বৎসর স্থগিত থাকে তবে চক্রবৃদ্ধি ধরে মোট বৃত্তি নির্ণয় :

মনে করি, $i = 1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ। যেহেতু বার্ষিক কিস্তি n বৎসর স্থগিত থাকবে সুতরাং প্রথম কিস্তি যা 1 বৎসর পরে দেয় তা $(n-1)$ বৎসর স্থগিত থাকবে। এর সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে $P(1 + i)^{n-1}$, দ্বিতীয় কিস্তি $(n-2)$ বৎসরের জন্য স্থগিত থাকবে এবং এর সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে $P(1+i)^{n-2}$। অনুরূপে তৃতীয় কিস্তিতে সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে $P(1+i)^{n-3}$ এবং এইরূপে শেষ কিস্তির সমূল-চক্রবৃদ্ধি হবে P

সুতরাং এই n-সংখ্যক সমূল চক্রবৃদ্ধির সমষ্টি A হলে,

$$A = P(1 + i)^{n-1} + P(1 + i)^{n-2} + \dots + P.$$

এই একটি গুণোত্তরীয় প্রগতি। এখানে প্রথম পদ = $P(1 + i)^{n-1}$ সাধারণ অনুপাত = $(1 + i)^{-1}$ এবং পদসংখ্যা n.

$$\therefore A = \frac{p}{i}\left[(1+i)^n - 1\right]$$

যদি বৎসরে p বার অর্থপ্রদান করা হয় (অর্থাৎ প্রতি কিস্তি $\frac{p}{p}$ টাকা), তবে

$$\boxed{\therefore A = \frac{P}{i}\left[\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np} - 1\right]}$$

৩.৫.৩ বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য (Present Value of an Annuity)

কোন বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য বলতে বিভিন্ন পর্ব শেষে প্রদেয় টাকার বর্তমান মূল্যসমূহের যোগফল বোঝায়।

ধর কোন সংস্থার 15 বছরের প্রতি বছরের শেষে 5000 টাকা প্রাপ্য। কিন্তু যদি ঐ সংস্থা তার পরিবর্তে থোক টাকা নিতে চায়, তবে যে পরিমাণ টাকা সংস্থার প্রাপ্য হবে তাকেই বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য বলা হবে।

সূত্র : n বৎসর মেয়াদী সাধারণ বার্ষিক কিস্তি P হলে চক্রবৃদ্ধি ধ'রে বর্তমান মূল্য নির্ণয় :

মনে করি, T_n = নির্ণেয় বর্তমান মূল্য

$i = 1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ।

$\therefore$ 1 বৎসর পরে দেয় প্রথম কিস্তি P-এর বর্তমান মূল্য = $\dfrac{P}{1+i}$

2 বৎসর পরে দেয় দ্বিতীয় কিস্তি P-এর বর্তমান মূল্য = $\dfrac{P}{(1+i)^2}$ ইত্যাদি n বৎসর পরে দেয় শেষ

কিস্তি P-এর বর্তমান মূল্য = $\dfrac{P}{(1+i)^n}$

$$\therefore T_n = P\left[\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

বা, $T_n = \dfrac{P}{i}\left[\dfrac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right] = \dfrac{P}{i}[1-(1+i)^{-n}$ [$\because$ গুণোত্তরীয় শ্রেণী]

যদি বৎসরে p বার অর্থ দেওয়া হয় তবে প্রদত্ত কিস্তি হয় $\dfrac{P}{p}$ এবং এক্ষেত্রে,

$$T_n = \left\{\left(\frac{P}{p}\right)\Big/\left(\frac{i}{p}\right)\right\}\times\left[1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}\right]$$

বা, $\boxed{T_n = \frac{P}{i}\left[1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}\right]}$

চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য

$$\boxed{T_\infty = \frac{P}{i}} \left[\because \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np} = 0\right]$$

৩.৫.৪ উদাহরণমালা

উদা. 1. 4% চক্রবৃদ্ধি হারে 1000 টাকার বার্ষিক বৃত্তির 15 বৎসরের মোট অঙ্ক নির্ণয় করুন।

এখানে P = 1000, n = 15 এবং $i = \frac{4}{100} = .04$

$\therefore$ মোট অঙ্ক $A = \frac{P}{i}\left[1+i)^n - 1\right] = 1000\times 25\left[(1.04)^{15} - 1\right]$

মনে করি, $x = (1.04)^{15}$ $\therefore$ $\log x = 15 \log 1.04$

$\therefore \log x = 15[\log 10.4 - \log 10] = 15[\log 10.4 - 1]$

$= 15 \times .017 = .255.$

$\therefore$ x = অ্যান্টিলগ (.255) = 1.799

$\therefore$ A = 1000 × 25 [1.799 – 1] = 1000 × 25 × .799 = 25 × 799 = 19,975 টাকা

উদা. 2. বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 10 বৎসরে দেয় একটি বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য 15,000 টাকা হলে বার্ষিকীর পরিমাণ কত?

এখানে $T_n = 15{,}000$, $i = \frac{6}{100} = \cdot 06$

$n = 10$, P = ?

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1-(1+i)^{-8}\right]$

এখানে $15{,}000 = \frac{P}{\cdot 06}\left[1-(1\cdot 06)^{-10}\right]$

মনে করি, $x = (1{\cdot}06)^{-10}$ $\therefore \log x = -10 \log 1{\cdot}06$

বা, $\log x = -10[\log 10{\cdot}6 - 1] = -10\ [1{\cdot}0235 - 1]$

$= -10 \times {\cdot}0235 = -{\cdot}253 + 1 - 1$

$= \bar{1}{\cdot}747$

$\therefore x =$ অ্যান্টিলগ $(\bar{1}{\cdot}747) = {\cdot}5585$

$$\therefore 15{,}000 = \frac{P}{{\cdot}06}\left[1 - {\cdot}5585\right] = \frac{P}{{\cdot}06} \times {\cdot}4415$$

$$\therefore \text{P} = \frac{{\cdot}06 \times 15{,}000}{{\cdot}4415} = 2{,}038$$ টাকা (প্রায়)

উদা. 3. 12 বৎসর মেয়াদী 150 টাকার নিয়মিত বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন।

[প্রদত্ত : $(1{\cdot}035)^{12} = 1{\cdot}511056$**]**

আমরা জানি, $T_n = \dfrac{P}{i}\left[1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}\right]$

এখানে $\text{P} = 150$, $n = 12$, $i = \dfrac{3.5}{100} = .035$

$$\therefore T_n = \frac{150 \times 100}{3{\cdot}5}\left[1 - \frac{1}{(1{\cdot}035)^{12}}\right] = 1449{\cdot}50$$ টাকা।

উদা. 4. এক ব্যক্তি 50,000 টাকা মূল্যে একটি বাড়ী কিনতে ইচ্ছুক। তিনি নগদ 20,000 টাকা এবং বাকী টাকা 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে দিতে প্রস্তুত। যদি 8% হারে বার্ষিক সুদ ধার্য হয় তবে ঐ ব্যক্তিকে বার্ষিক কত টাকা দিতে হবে? [প্রদত্ত : $1/(1.08)^{10} = .4634$**]**

আমরা জানি, $T_n = \dfrac{P}{i}\left[1 - \dfrac{1}{(1\_i)^{\text{n}}}\right]$

এখানে, $\text{T}_n = 30{,}000$, $i = \dfrac{8}{100} = .08, n = 10$, $\text{P} = ?$

$$\therefore 30{,}000 = \frac{P}{{\cdot}08}[1 - {\cdot}4634] = \frac{P}{{\cdot}08} \times {\cdot}5366$$

$$\therefore P = \frac{30{,}000 \times {\cdot}08}{{\cdot}5366} = 4472$$ টাকা।

উদা. 5. এক ব্যক্তি 10,000 টাকা ঋণ নিলেন। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে বাৎসরিক 1000 টাকার কিস্তিতে তা শোধ করবেন। কত বৎসরে ঐ ঋণ শোধ হবে?

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$

এখানে P = 1000, $i = \frac{5}{100} = .05, T_n = 10,000, n = ?$

$$\therefore 10,000 = \frac{1000}{\cdot 05}\left[1-(1\cdot 05)^{-n}\right]$$

$$= 1000 \times 20[1-(1\cdot 05)^{-n}]$$

বা, $\frac{1}{2} = 1-(1\cdot 05)^{n}$ বা, $(1\cdot 05)^{-n} = \frac{1}{2}$ বা, $(1\cdot 05)^{n} = 2$

$\therefore n \log(1\cdot 05) = \log 2 \quad \therefore n = \frac{\log 2}{\log 1\cdot 05} = 14\cdot 2$ বৎসর (প্রায়)।

৩.৬ অনুশীলনী

1. এক ব্যক্তি বার্ষিক 3% হারে সরল সুদে কিছু টাকা ধার করে 5% চক্রবৃদ্ধি হাকে সেই টাকা অন্যকে ধার দিল। যদি 3 বৎসর পরে 541 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তবে সে কত টাকা ধার করেছিল?

[উঃ 8000 টাকা (প্রায়)

2. কোন ব্যক্তি সেভিংস ব্যাঙ্কে 5000 টাকা জমা রাখেন। চক্রবৃদ্ধি সুদের হার প্রথম 2 বৎসর বার্ষিক $4\frac{1}{2}\%$ এবং পরের 3 বৎসরে বার্ষিক 5%। 5 বৎসর পরে তার মোট কত টাকা হবে?

[উঃ 6320·78 টাকা]

3. চক্রবৃদ্ধিতে লগ্নী করার ফলে কোন টাকার দ্বিতীয় বৎসর শেষে 2704 টাকা এবং তৃতীয় বৎসর শেষে 2812.16 টাকা সমূল চক্রবৃদ্ধি হল। সুদের বাৎসরিক হার এবং মূলধন নির্ণয় করুন।

[উঃ 4%, 2500 টাকা]

4. বার্ষিক 6% হার সুদে 250 টাকার 10 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর, যখন সুদ তিন মাস অন্তর আসলের সাথে যোগ হয়। [উঃ 453·45 টাকা]

5. একটি বাড়ী নগদ 1,50,000 টাকা ও 5 বৎসর পরে 3,00,000 টাকা দিয়ে কেনা যায়। বার্ষিক 12.5% হারে সুদ যদি বৎসরান্তে আসলের সাথে যুক্ত হয় তবে বাড়ীটির দাম কত হওয়া উচিত।

[উঃ 3,16,380 টাকা]

6. যদি কোন শহরের লোকসংখ্যা প্রতি বৎসর ঐ বৎসরের শুরুতে যে লোকসংখ্যা ছিল তার 2% বৃদ্ধি পায়, তবে কত সময়ে জনসংখ্যা 40% বৃদ্ধি পাবে? [উঃ 17 বৎসর (প্রায়)]

7. একটি মেসিনের প্রারম্ভিক মূল্যের উপর 10% অবচয় ঘটে। মেসিনটির ক্রয়মূল্য 5810 টাকা এবং কিছুদিন ব্যবহার করার পরে 2250 টাকায় বিক্রয় করা হয়েছিল। মেসিনটি কত বৎসর ব্যবহার করা হয়েছিল? [উঃ 9 বৎসর (প্রায়)]

8. পোষ্ট অফিস 5 বৎসর মেয়াদের স্থায়ী জমার জন্য 14% হারে সরল সুদে দেয়। এই সুদ অর্ধ বৎসরান্তে দেয় চক্রবৃদ্ধির সমান হলে সুদের বার্ষিক হার কত? [উঃ 10.8%]

9. প্রতি বৎসরের শেষে অবচয় ধার্য করার পর কোন যন্ত্রের মূল্য যন্ত্রটির মূল্যের 90% হল। যন্ত্রটির ক্রয়মূল্য 12000 টাকা এবং ধাতুমূল্য 200 টাকা। যন্ত্রটি কতকাল ব্যবহার করা হয়েছিল?

[উঃ 38.8 বৎসর (প্রায়)]

10. কোন লোক সংখ্যার ক্ষেত্রে বার্ষিক জন্ম ও মৃত্যুর হার প্রতি হাজারে যথাক্রমে 39.4 এবং 19.4। কোন বহিরাগমন এবং নির্গমন না ঘটলে কত বৎসরে ঐ লোকসংখ্যা দ্বিগুণ হবে?

[উঃ 35 বৎসর]

11. কত মূল্যে 4 বৎসর মেয়াদের 1050 টাকার বার্ষিক বৃত্তি ক্রয় করা যাবে, যদি চক্রবৃদ্ধি হার বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ হয়? [উঃ 3846 টাকা]

12. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে বৎসরান্তে দেয় এবং দশ বৎসর মেয়াদী 500 টাকার বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন। [উঃ 3862 টাকা]

13. বার্ষিক 4% হারে 15 বৎসরের মেয়াদের 150 টাকার বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক নির্ণয় করুন। বৃত্তি এবং সুদ প্রতি অর্ধ বৎসর অন্তে দেওয়া হয়। [উঃ 3041·25 টাকা]

14. একটি কোম্পানী 10,000 টাকা এই শর্তে ধার করল যে বার্ষিক 5% হার সুদে তা 1000 টাকার বার্ষিক কিস্তিতে শোধ করা হবে। কত বৎসরে ধার শোধ হবে? [উঃ 14.2 বৎসর (প্রায়)]

15. এক ব্যক্তি 6% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 40,000 টাকা ধার নিলেন। তিনি প্রথম চার বৎসর প্রতি বৎসরে 9000 টাকা করে শোধ করবেন এবং বাকী টাকা পঞ্চম বৎসরের শেষে শোধ করবেন। শেষ কিস্তিতে তিনি কত টাকা দেবেন? [উঃ 11,800 টাকা]

16. এক ব্যক্তি 40,000 টাকা মূল্যের একটি বাড়ী ক্রয় করলেন। তিনি 10,000 টাকা নগদ দেবেন এবং ক্রয়ের দিন থেকে 1 বৎসর পরে প্রথম কিস্তিসহ 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে অবশিষ্ট টাকা শোধ করবেন। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার হলে, প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় করুন।

[উঃ 3884 টাকা (প্রায়)]

17. কোন কোম্পানী 10 বৎসর পরে দেয় 60,000 টাকার ডিবেঞ্চার পরিশোধ করবার জন্য বৎসরে 5000 টাকা জমা রাখে। তা বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে জমতে থাকলে ডিবেঞ্চার শোধ করে কত টাকা উদ্বৃত্ত থাকবে? [উঃ 2900 টাকা]

18. 25 বৎসরের শেষে 54,000 টাকা মূল্যের কিছু যন্ত্রপাতি বদলাবার জন্য একটি ঋণ পরিশোধ তহবিল (Sinking Fund) গঠন করা হল। যদি লগ্নী থেকে বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে আয় হয় তবে প্রতি বৎসর লাভ থেকে কত পরিমাণ অর্থ ঐ তহবিলে জমা দেওয়া উচিত যদি ঐ সময় অন্তে যন্ত্রপাতির ধাতুমূল্য হিসাবে 4000 টাকা পাওয়া যায়? [উঃ 1047 টাকা (প্রায়)]

19. এক ব্যক্তি প্রতি বৎসর অন্তে 300 টাকা মূল্যের একটি বৃত্তি বিতরণ করবার জন্য একটি যৌতুক তহবিল (Endowment Fund) গঠন করতে ইচ্ছুক। বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হারে তহবিলের টাকা লগ্নী করলে যৌতুকের টাকার পরিমাণ নির্ণয় করুন। [উঃ 3000 টাকা]

20. বার্ষিক $2\frac{3}{4}\%$ চক্রবৃদ্ধি হারে 5500 টাকা লগ্নী করে কত টাকার চিরস্থায়ী কিস্তি ক্রয় করা যাবে?

[উঃ 151 টাকা]

একক ৪ □ সমীকরণ (Equation)

গঠন

৪.১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন সমীকরণ কী এবং তার প্রয়োগ, দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার ব্যবহার, সমাধানের উপায় জানতে পারবেন।

৪.২ সমীকরণ ঃ সরল এবং দ্বিঘাত

এক বা একাধিক চলরাশির সমন্বয়ে গঠিত দুটি বীজগাণিতিক রাশির সমতা যদি চলরাশিগুলির কতগুলি নির্দিষ্ট মানের জন্য সিদ্ধ হয় তবে সমতাটিকে সমীকরণ বলে। উদাহরণ স্বরূপ $5x + 22 = 12x + 1$ একটি সমীকরণ কারণ উহা চলরাশি x এর মান 3 এর জন্য সত্য। 3 কে সমীকরণটির একটি বীজ বলা হয়। যখন পূর্বে উল্লেখিত সমতাটি চলরাশিগুলির যেকোন মানের জন্য সত্য হবে তখন সমতাটিকে অভেদ বলা হবে। যথা $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ একটি অভেদ।

যে সমীকরণে একটি একঘাত অজ্ঞাত রাশি (x) থাকে তাকে একঘাত সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলা হয়।

দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ঘাতের সমীকরণকে যথাক্রমে দ্বিঘাত (quadratic) এবং ত্রিঘাত (cubic) সমীকরণ বলে।

$7x + 2 = 0$ বা $ax + b = 0$ সরল সমীকরণ। $ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$ বা $x^2 + y^2 = r^2$ দ্বিঘাত সমীকরণ। $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

৪.৩ কয়েকটি বিশেষ উপপাদ্য

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) ঃ বাস্তব সহগযুক্ত কোন বহুপদ রাশিমালাকে $(x - h)$ দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষটি ঐ রাশিমালায় x-এর স্থানে h বসিয়ে পাওয়া যায়।

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem) ঃ x-চলরাশিযুক্ত কোন বহুপদ রাশিমালায় x-এর স্থলে h বসালে যদি রাশিমালাটির মান শূন্য হয়, তবে $(x - h)$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক।

বীজগণিতের মৌল উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Algebra) ঃ বাস্তব সহগযুক্ত সকল সমীকরণের অন্ততঃ একটি বীজ থাকে।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ

$$\frac{3x}{4} - 8 = \frac{2x}{5} + 3$$

বা, $\dfrac{3x - 32}{4} = \dfrac{2x + 15}{5}$ বা, $5(3x - 32) = 4(2x + 15)$

বা, $15x - 160 = 8x + 60$

বা, $7x = 220$ বা, $x = \frac{220}{7} = 31\frac{3}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 31\frac{3}{7}$

উদাহরণ ঃ 2. $3(x+3)^2 + 5(x+5)^2 = 8(x+8)^2$

বা, $3(x^2 + 6x + 9) + 5(x^2 + 10x + 25) = 8(x^2 + 16x + 64)$

বা, $18x + 27 + 50x + 125 = 128x + 512$

বা, $60x = 360$ বা, $x = \frac{360}{60} = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 6$

৪.৪ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

একটি চলরাশিযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ সমাধানের প্রধানতঃ দুটি পদ্ধতির সাহায্য নেওয়া হয় ঃ

(i) উৎপাদক পদ্ধতি (ii) বর্গ নির্ণয় পদ্ধতি।

(i) একটি উদাহরণ নেওয়া যাক।

$3x^2 - 8x + 4 = 0$

বা, $3x^2 - 6x - 2x + 4 = 0$ বা, $3x(x-2) - 2(x-2) = 0$

বা, $(x-2)(3x-2) = 0$

সুতরাং, $x - 2 = 0$

অথবা, $(3x-2) = 0$

বা, $x = 2$ অথবা, $x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2$ বা $\frac{2}{3}$

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ (আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ) $(a \neq 0)$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

বা, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}$ বা, $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

সুতরাং xএর দুটি মান $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

উদাহরণ ঃ 3. সমাধান করুন ঃ $3x^2-10x+6=0$

এখানে, $a=3,\ b=-10,\ c=6$

$\therefore\ x=\dfrac{10\pm\sqrt{100-72}}{6}=\dfrac{10\pm\sqrt{28}}{6}=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

৪.৪.১ দ্বিঘাত সমীকরণে পরিবর্তিত করা যায় এরূপ সমীকরণ

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ $4^x-5.2^{x+2}+64=0$

বা, $(2^x)^2-20,\ 2^x+64=0$ মনে করি, $2^x=y$

$\therefore\ y^2-20y+64=0$, বা, $(y-4)(y-16)=0$

$\therefore\ y=4$, বা, $y=16$,

$\therefore\ 2^x=4$ বা, $2^x=2^2$ বা, $x=2$,

আবার, $2^x=16$, বা, $2^x=2^4$, বা, $x=4$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2,\ 4$

উদাহরণ ঃ 2. সমাধান করুন ঃ $\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-6}=3$

বা, $\sqrt{2x+5}=3+\sqrt{x-6}$ বর্গ নিয়ে পাই,

$$2x+5=\left(3+\sqrt{x-6}\right)^2=9+6\sqrt{x-6}+x-6$$

$$=x+3+6\sqrt{x-6}$$

বা, $x+2=6\sqrt{x-6}$ পুনরায় বর্গ নিয়ে পাই,

$(x+2)^2=36(x-6)$ বা, $x^2+4x+4=36x-216$

বা, $x^2-32x+220=0$ বা $(x-10)(x-22)=0$

বা, $x=10$ এবং $x=22$

উদাহরণ ঃ 3. সমাধান করুন ঃ $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)-9=0$

পুনরায় সাজিয়ে, $\{(x+2)(x+8)\}\{(x+4)(x+6)\}-9=0$

বা, $(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)-9=0$

$y=x^2+10x$ ধরে পাই,

$(y+16)(y+24)-9=0$

বা, $y^2+40y+375=0$

বা, $(y+25)(y+15)=0$

$\therefore\ y=-25$ বা, -15

যখন $y=-25,\ x^2+10x+25=0$, বা, $(a+5)^2=0$

বা, $x=-5,-5$

যখন $y=-15$, বা, $x^2+10x+15=0$,

বা, $x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-60}}{2}=-5\pm\sqrt{10}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $-5,\ -5,\ -5\pm\sqrt{10}$

৪.৪.২ প্রশ্নমালা

সমাধান করুন ঃ

(1) $\sqrt{6x-5}-\sqrt{3x-2}=2$ [উঃ 9]

(2) $2\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+8}=2$ [উঃ ± 5]

(3) $\sqrt{3x^2-7x+30}+\sqrt{3x^2-7x-5}=7$ [উঃ $3,-\frac{2}{3}$]

(4) $x^2+13x+42=0$ [উঃ $x=6$ বা 7]

(5) $x^2 + 2x - 24 = 0$ [উঃ $x = 4, -6$]

(6) $2^{2x} - 3.2^{x+2} + 32 = 0$ [উঃ 2, 3]

(7) $3^x + 3^{3-x} = 12$ [উঃ 1, 2]

(8) $5^{2x} - 6.5^{x+1} + 125 = 0$ [উঃ 1, 2]

(9) $(x+1)(x-3)(4x-3)(4x-5) = 4$ [উঃ 1, 1, $\frac{4 \pm \sqrt{65}}{4}$]

(10) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 2$ [উঃ $2 \pm \sqrt{3}$]

৪.৪.৩ দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব (Theory of Quadratic Equation)

আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$

আমরা জানি, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ..... (1)

দ্রষ্টব্য ঃ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি এবং কেবল দুটিই বীজ আছে।

● দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সম্পর্ক

মনে করি, $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β অতএব,

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}} \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

● পূরক বীজ (Conjugate roots) :

যদি $p + \sqrt{q}$ এবং $p - \sqrt{q}$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ হয় তবে একটিকে অপরটির পূরক বীজ বলে।

উপপাদ্য ঃ মূলদ সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ হলে অপর বীজটি তার পূরক হবে।

● বীজদ্বয়ের প্রকৃতি ঃ (i) যদি $b^2 - 4ac > 0$ হয় তবে বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে। [(1) থেকে পাই]

(ii) যদি $b^2 = 4ac$ হয়, তবে বীজদ্বয় বাস্তব এবং সমান।

(iii) যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয় তবে বীজদ্বয় অবাস্তব এবং অসমান হবে।

(iv) যদি $b = 0$ তবে বীজদ্বয়ের মান সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

$(b^2 - 4ac)$-কে নিরুপক (Discriminant) বলে।

● **বীজদ্বয় জানা থাকলে সমীকরণ নির্ণয় ঃ**

মনেকরি, α, β, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয়। সমীকরণটি লেখা যায়

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \ [\because a \neq 0]$

বা, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

অর্থাৎ, $x^2 -$ (বীজদ্বয়ের যোগফল) $x +$ বীজদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

৪.৪.৪ উদাহরণমালা

উদাহরণ ঃ 1. দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার একটি বীজ $3 + \sqrt{4}$

যেহেতু একটি বীজ $3 + \sqrt{4}$ (অমূলদ) অপর বীজটি হবে $3 - \sqrt{4}$

মনেকরি, $\alpha = 3 + \sqrt{4}$ $\beta = 3 - \sqrt{4}$

নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 + 6x + 5 = 0$

উদাহরণ ঃ 2. দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজদ্বয় $x^2 - 15x + 56 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় থেকে 2 কম।

মনেকরি, α, β, $x^2 - 15x + 56 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয়,

$\therefore \ \alpha + \beta = 15, \alpha\beta = 56$

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha - 2, \beta - 2$

এখন $(\alpha - 2) + (\beta - 2) = \alpha + \beta - 4 = 15 - 4 = 11$

$(\alpha - 2)(\beta - 2) = \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4$

$= 56 - 30 + 4 = 30$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - 11x + 30 = 0$

উদাহরণ ঃ 3. $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকবার শর্ত নির্ণয় করুন।

মনেকরি, α দুটি সমীকরণেরই একটি বীজ।

$\therefore\ a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

এবং $a^1\alpha^2 + b^1\alpha + c^1 = 0$

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই, $\dfrac{\alpha^2}{bc^1 - cb^1} = \dfrac{\alpha}{a^1c - c^1a} = \dfrac{1}{ab^1 - b^1a}$

প্রথম দুইটি সমতা থেকে $\alpha = \dfrac{bc^1 - cb^1}{a^1c - c^1a}$ ......(1)

শেষ দুটি সমতা থেকে $\alpha = \dfrac{ca^1 - ac^1}{ab^1 - ba^1}$ ....(2)

(1) এবং (2) থেকে $\dfrac{bc^1 - cb^1}{a^1c - c^1a} = \dfrac{ca^1 - ac^1}{ab^1 - a^1b}$

বা, $(bc^1 - cb^1)(ab^1 - a^1b) = (ca^1 - ac^1)^2$

এটাই নির্ণেয় শর্ত।

উদাহরণ ঃ 4. $ax^2 + bx + c = 0$ এর বীজদ্বয় ঋণাত্মক হলে দেখান যে a, b, c একই চিহ্ন যুক্ত হবে।

মনেকরি, α, β দুটি বীজ এবং $\alpha = -p^2$ এবং $\beta = -q^2$

$\therefore\ \alpha + \beta = -(p^2 + q^2) = -\dfrac{b}{a}$ বা, $p^2 + q^2 = \dfrac{b}{a}$ এখানে বামপক্ষ ধনাত্মক, সুতরাং a এবং b উভয়েই ধনাত্মক অথবা উভয়েই ঋণাত্মক হবে। আবার $\alpha\beta = (-p^2)(-q^2) = p^2q^2 = \dfrac{c}{a}$

$\therefore\ p^2q^2 = \dfrac{c}{a}$. p^2q^2 ধনাত্মক সুতরাং a এবং c-র একই চিহ্ন হবে। অতএব a, b, c-র একই চিহ্ন হবে।

৪.৪.৫ প্রশ্নমালা

(1) যদি $4x^2 + 9x + c = 0$-এর একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হয় তবে বীজদ্বয় এবং c নির্ণয় করুন।

[উঃ $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}$]

(2) নিম্নের সমীকরণগুলির বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন ঃ

(i) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ [উঃ বাস্তব, মূলদ ও সমান]

(ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$ [উঃ বাস্তব, অমূলদ ও অসমান]

(3) m-এর কোন মানের জন্য $(m + 2)x^2 + (3m - 2)x + 2m - 3 = 0$-র সমান বীজ থাকবে।

[উঃ 2, 14]

(4) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজদ্বয় $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$ [উঃ $12x^2 + x - 6 = 0$]

(5) দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার একটি বীজ $(5-4\sqrt{3})$ [উঃ $x^2 + 10x - 23 = 0$]

(6) দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজ $p \pm \sqrt{p^2 - 4q}$

[উঃ $x^2 - 2px + 4q = 0$]

(7) $ax^2 + bx + c = 0$-এর একটি বীজ যদি অপরটির চারগুণ হয় তবে দেখান যে $4b^2 = 25ac$

(8) যদি $ax^2 + bx + c = 0$-এর বীজদ্বয় $m : n$ অনুপাতে থাকে; দেখান যে,

$$\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}} + \sqrt{\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}} + \sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}} = 0$$

(9) যদি $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$-এর একটি সাধারণ বীজ থাকে তবে দেখান যে $p = q$ অথবা $p + q + 1 = 0$

(10) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজদ্বয় $3x^2 - 7x + 5 = 0$ বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক।

[উঃ $5x^2 - 7x + 3 = 0$]

৪.৫ প্রতিসম রাশিমালা (Symmetric Expression)

α, β দুই রাশিযুক্ত যে রাশিমালায় α, β-র স্থান বিনিময়ের ফলেও যদি রাশিমালাটি অপরিবর্তিত থাকে তবে তাকে প্রতিসম বলে। যথা $\alpha^2+\beta^2, \frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$, $\alpha\beta$ ইত্যাদি।

উদাহরণ ঃ 1. যদি α, β $2x^2-3x+4=0$ এর দুইটি বীজ হয় তবে $\alpha^3+\beta^3$-এর মান নির্ণয় করুন। এখানে, $\alpha^3+\beta^3 = +\frac{3}{2}$, $\alpha\beta = \frac{4}{2} = 2$

$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{27}{8} - 6\times\frac{3}{2} = \frac{27}{8} - = \frac{-45}{8}$$

উদাহরণ ঃ 2. α, β, $ax^2+bx+c=0$-এর দুটী বীজ হল $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$-এর মান নির্ণয় করুন।

এখানে, $\alpha+\beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2\,2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2-2ac}{ac}$$

উদাহরণ ঃ 3. যদি α এবং β $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুটি বীজ হয় তবে $\frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $ax^2+bx+c=0....(1)$ α, β এই সমীকরণের দুটি বীজ। $\therefore\ \alpha+\beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $a\alpha+a\beta=-b$ বা, $a\alpha+b=-a\beta$ এবং $a\beta+b=-a\alpha$

$$\therefore\ \frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3} = \frac{1}{(-a\beta)^3}+\frac{1}{(-a\alpha)^3} = -\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\alpha^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{a^3}\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}\right) = -\frac{1}{a^3}\left[\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^3}\cdot\frac{-\dfrac{b^3}{a^3}-3\dfrac{c}{a}\left(-\dfrac{b}{a}\right)}{\dfrac{c^3}{a^3}} = \frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$$

● **x-এর বাস্তব মানের জন্য $ax^2 + bx + c$-এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান ঃ**

1. a ধনাত্মক হলে $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ সর্বনিম্ন মান।

2. a ঋণাত্মক হলে $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ সর্বোচ্চ মান।

$ax^2 + bx + c$-এর চিহ্ন ঃ

(i) যদি উপরের রাশিমালার বীজদ্বয় বাস্তব এবং সমান হয় তবে $ax^2 + bx + c$ এবং a-র চিহ্ন একই হবে।

(ii) যদি বীজদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হয়, (ধরি $\alpha > \beta$) তবে x, α এবং β-র মধ্যে না থাকলে a এবং $ax^2 + bx + c$-এর একই চিহ্ন হবে এবং x, α এবং β-র মধ্যে থাকলে a এবং $ax^2 + bx + c$-এর বিপরীত চিহ্ন হবে।

উদাহরণ ঃ 1. x বাস্তব হলে, $3x^2 - 5x + 4$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন।

মনেকরি, $y = 3x^2 - 5x + 4 \;\therefore\; 3x^2 - 5x + 4 - y = 0$

নিরূপক $= 25 - 12(4 - y) = 12y - 23 = 12\left(y - \dfrac{23}{12}\right)$

x বাস্তব সুতরাং নিরূপক ঋণাত্মক হবে না অর্থাৎ $y \geq \dfrac{23}{12}$

$\therefore\; 3x^2 - 5x + 4$-এর সর্বনিম্ন মান $\dfrac{23}{12}$

উদাহরণ ঃ 2. $1 + 8x - 6x^2$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করুন।

মনেকরি, $y = 1 + 8x - 6x^2 \;\therefore\; (1 - y) + 8x - 6x^2 = 0$

বা, $6x^2 - 8x + (y - 1) = 0$

নিরূপক $= 64 - 24(y - 1) = 64 + 24 - 24y = 88 - 24y = 4(22 - 6y)$

সুতরাং $(22 - 6y)$ ঋণাত্মক হবে না।

$\therefore\; \dfrac{22}{6}$ বা $\dfrac{11}{3}$ সর্বোচ্চ মান।

উদাহরণ ঃ 3. দেখান যে x-এর বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ এর মান 5 এবং 9-এর মধ্যে থাকতে পারে না।

মনেকরি, $y=\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$

বা, $x^2(1-y)+2x-(17-y)+7y-71=0$

নিরূপক $=4(17-y)^2-4(1-y)(7y-71)$

$=32(y-9)(y-5)$

x বাস্তব, সুতরাং নিরূপক ঋণাত্মক হবে না।

যদি $y>9$ বা $y<5$ হয় তবে নিরূপক ধনাত্মক হয়। যদি $y>5$, কিন্তু $y<9$ নিরূপক ঋণাত্মক হবে। সুতরাং y-এর মান 5 এবং 9-এর মধ্যে থাকতে পারে না।

৪.৫.১ প্রশ্নমালা

(1) যদি α ও β, $ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় হয় তবে $\dfrac{\alpha^2}{\beta}-\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ এর মান নির্ণয় করুন।

[উঃ $\pm\dfrac{(b^2-ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^2c}$]

(2) $1+8x-6x^2$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করুন। [উঃ $\dfrac{11}{3}$]

(3) $x^2-6x+10$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন। [উঃ 1]

(4) দেখান x-এর বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{6x^2-22x+21}{5x^2-18+17}$-এর মান 1 এবং $\dfrac{5}{4}$-এর মধ্যে থাকে।

(5) দেখান x-এর বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$-এর মান 1 এবং –7-এর মধ্যে থাকতে পারে না।

৪.৬ একঘাত বিশিষ্ট সহ-সমীকরণ (Simultaneous Linear Equations)

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ......(1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ......(2)

একটি একঘাত সহ-সমীকরণ গঠন করে। x ও y-এর মান নির্ণয় করতে হবে যা (1) এবং (2)-কে সিদ্ধ করে।

(1) এবং (2)-থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই

$$\frac{x}{b_1c_2 - c_1b_2} = \frac{y}{c_1a_2 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \quad [a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0]$$

এই হ'ল নির্ণেয় সমাধান।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ $3x + 2y + 17 = 0,\ 5x - 6y - 9 = 0$

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই $\frac{x}{-18+102} = \frac{y}{85+27} = \frac{1}{-18+10}$

বা, $\frac{x}{84} = \frac{y}{112} = \frac{-1}{28} \qquad \therefore \ x = -\frac{84}{28} = -3$

$$y = \frac{-112}{28} = -4$$

উদাহরণ ঃ 2. সমাধান করুন ঃ

$$\frac{3}{x} + \frac{7}{y} = 6 \text{.....(1)}, \ \frac{5}{x} + \frac{8}{y} = 7\frac{19}{21} = 7 + \frac{19}{21} \text{.....(2)}$$

$$(1)\times 5, \ \frac{15}{x} + \frac{35}{y} = 30$$

$$(2)\times 3, \ \frac{15}{x} + \frac{24}{y} = 21 + \frac{19}{7}$$

বিয়োগ ক'রে, $\frac{11}{y} = 9 - \frac{19}{7} = \frac{63-19}{7} = \frac{44}{7}$

$\therefore\ \frac{1}{y} = \frac{4}{7}\ \ \therefore\ \ y = \frac{7}{4}$

(1) এ $\frac{1}{y}$-এর মান বসিয়ে পাই $x = \frac{3}{2}$

৪.৭ সহ-দ্বিঘাত সমীকরণ ঃ দুটি অজ্ঞাত রাশি

একটি দ্বিঘাত ও একটি একঘাত ঃ একঘাত সমীকরণ থেকে একটি অজ্ঞাত রাশির মান দ্বিঘাত সমীকরণটিতে বসাতে হবে।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ $x^2 + xy = 12$ ......(1), $2x - y = 5.$ ......(2)

(2) থেকে পাই $y = 2x - 5$ (1)-এ বসিয়ে পাই

$x^2 + x(2x-5) = 12$ বা, $x^2 + 2x^2 - 5x - 12 = 0$

বা, $3x^2 - 5x - 12 = 0$ বা, $(x-3)(3x+4) = 0$

$\therefore\ x = 3$ বা, $x = \frac{4}{3}$

যখন $x = 3,\ y = 2.3 - 5 = 1$

যখন $x = -\frac{4}{3}, y = -\frac{4}{3}.2 - 5 = -\frac{8}{3} - 5 = -\frac{23}{3}$

উদাহরণ ঃ 2. সমাধান করুন ঃ $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}$ ....(1)

$x + y = 10$ ....(2)

(1) থেকে $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$ বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$ বা, $\frac{1}{\sqrt{xy}} = \frac{1}{4}$

বা, $\sqrt{xy} = 4$, $xy = 16$ ..... (3)

(2) থেকে $x = 10 - y \quad \therefore (10 - y)\, y = 16$ বা $10y - y^2 = 16$

বা, $y^2 - 10y + 16 = 0$ বা $(y - 2)(y - 8) = 0 \;\therefore\; y - 2,\ 8$

যখন $y = 2$, (2) থেকে $x = 8$

যখন $y = 8$, (2) থেকে $x = 2$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy. = 100 - 4.16$ [(2) এবং (3) হইতে]

$\therefore (x - y)^2 - 36 \quad \therefore x - y = \pm 6$ ...(4)

(2) এবং (4) থেকে যোগ ও বিয়োগ দ্বারা x, y নির্ণয় করা যায়।

৪.৮ সহ-সমীকরণ ঃ তিনটি অজ্ঞাত রাশি

যখন তিনটি সমীকরণের মধ্যে দুইটি x, y, z-এ একঘাত তখন সেই দুটি থেকে x এবং y-কে z-এর সাপেক্ষে প্রকাশ ক'রে তৃতীয় সমীকরণে বসাতে হবে।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ

$x + y + z = 6$ ....(1)

$2x - y + 5z = 15$ ....(2)

$yz + zx + xy = 11$ ....(3)

(1), (2) যোগ করে পাই $3x + 6z = 21$ বা, $x + 2z = 7$

বা, $x = 7 - 2z$ .... (4)

আবার $(2) - 2 \times (1)$ থেকে পাই $-3y + 3z = 3$

বা, $y = z - 1$ .... (5). (4) এবং (5) থেকে x, y-এর মান (3)-এ বসিয়ে,

$(z - 1)z + z(7 - 2z) + (7 - 2z)(z - 1) = 1$

বা, $z^2 - 5z + 6 = 0$ বা, $(z - 3)(z - 2) = 0 \;\therefore\; z = 3,\ 2.$

(4) এবং (5) থেকে $x = 1,\ 3.$ এবং $y = 2,\ 1.$

দ্রষ্টব্য ঃ একঘাত সমীকরণ দুটিতে যদি ধ্রুবক রাশি না থাকে তখন বজ্রগুণন পদ্ধতি সুবিধাজনক।

উদাহরণ ঃ 2. সমাধান করুন ঃ $xy = a^2,\ yz = b^2,\ zx = c^2,$

$\therefore x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2$ বা, $xyz = \pm abc$

$\therefore \quad \frac{xyz}{xy} = \pm \frac{abc}{a^2} \quad$ বা, $z = \pm \frac{bc}{a}$

অনুরূপে $x = \pm \frac{ca}{b}$, $y = \pm \frac{ab}{c}$

উদাহরণ ঃ 3. $(y+z)(z+x) = 40$ .....(1)

$(z+x)(x+y) = 36$ .....(2)

$(x+y)(y+z) = 90$ .....(3)

$(1) \times (2) \times (3)$, $(y+z)^2\,(z+x)^2\,(x+y)^2 = 40 \times 36 \times 90$

বা, $(y+z)(z+x)(x+y) = \pm 10 \times 6 \times 2 \times 3 = \pm\,360$ ...(4)

(1), (2), (3) এবং (4) থেকে পাই

$x + y = \pm\,9,\ y + z = \pm\,10,\ z + x = \pm\,4$ ...(5)

$\therefore\ 2(x+y+z) = \pm\,(9+10+4) = \pm\,23$

$\therefore\ x+y+z = \pm\,\frac{23}{2}$ ...(6)

(5) এবং (6) থেকে $x = \pm\frac{3}{2}, y = \pm\frac{15}{2}, z = \pm\frac{5}{2}$

উদাহরণ ঃ 4. সমাধান করুন ঃ $x^2 - yz = a$ .....(1)

$y^2 - zx = b$ .....(2)

$z^2 - xy = c$ .....(3)

$(1) \times y + (2) \times z + (3) \times x$, $\quad cx + ay + bz = 0$ .....(4)

$(1) \times z + (2) \times x + (3) \times y$, $\quad bx + cy + az = 0$ .....(5)

(4) ও (5) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই $\frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ca} = \frac{z}{c^2 - ab} = k$ (ধরি)

$\therefore\ x = k(a^2 - bc),\ y = (b^2 - ca),\ z = k(c^2 - ab)$

(1)-এ বসিয়ে পাই $K = \pm \frac{1}{\sqrt{a^3 - b^3 + c^3 - 3abc}}$

$\therefore\ x = \pm \frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^3 - b^3 + c^3 - 3abc}}$ অনুরূপ y এবং z পাওয়া যাবে।

৪.৯ অনুশীলনী

সমাধান করুন ঃ

(1) $x^2 + xy = 15,\ x - y = 1.$ [উঃ $x = 3, -\frac{5}{2}$]

(2) $x^2 + y^2 = 13,\ x + y = 5.$ [উঃ $x = 2,\ 3$]

(3) $2x^2 + 3xy + y^2 = 15,\ 5x + 2y = 12.$ [উঃ $x = 2,\ 14;\ y = 1,\ -29$]

(4) $x + y = \frac{5}{6}, \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$ [উঃ $x = \frac{1}{3}, \frac{5}{2}; y = \frac{1}{2}, \frac{-5}{3}$]

(5) $x - y = 16,\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{16}{15}$ [উঃ $x = 25, -9,\ y = 9, -25$]

(6) $x + y + xy = 5,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$ [উঃ $x = 2,\ y = 1, x = 1,\ y = 2$]

(7) $x + y = 5, x^2 + 2y^2 - xy = 11$ [উঃ $x = 3, \frac{13}{4};\ y = 2, \frac{7}{4}$]

(8) $4x + 5y - 3z = 5,\ 2x - 3y + 4z = 8,\ x^2 + y^2 - z^2 = 14$

[উঃ $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$, বা, $x = 3,\ y = -2,\ z = -1$]

(9) $x(y + z) = 5,\ y(z + x) = 8,\ z(x + y) = 9$

[উঃ $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$, বা, $x = -1,\ y = -2,\ z = -3$]

(10) $y + z = \frac{1}{x},\ z + x = \frac{1}{y},\ x + y = \frac{1}{z}$ [উঃ $x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$]

(11) $xz + y = 7z,\ yz + x = 8z,\ x + y + z = 12$ [উঃ $x = 4, \frac{60}{7},\ x = 6, \frac{66}{7},\ z = 2, -6$]

(12) $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2},\ y + \frac{1}{z} = \frac{7}{3},\ z + \frac{1}{x} = 4$ [উঃ $x = 1, \frac{3}{10};\ y = 2, \frac{5}{6};\ z = 3, \frac{2}{3};$]

(13) $x^2 - yz = 5,\ y^2 - zx = 3,\ z^2 - xy = -1,$ [উঃ $x = 2, -2,\ y = 1, -1,\ z = -1, 1$]

(14) $xy = 56;\ yz = 40;\ zx = 35,$ [উঃ $x = \pm 7,\ y = \pm 8,\ z = \pm 5$]

(15) একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিসীমা 60 সে. মি. এবং ক্ষেত্রফল 150 বর্গ সে. মি. হলে ত্রিভুজটির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। [**উঃ** 15 সে. মি., 20 সে. মি. এবং 25 সে. মি.]

[**সংকেত ঃ** মনে করি সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য x সেমি এবং অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্য y এবং z সে.মি., তাহলে প্রশ্নানুসারে, $x + y + z = 60$ .... (1) ; $yz = 150$ ....(2) এবং $y^2 + z^2 = x^2$ ....(3) ($\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী)]

(16) কোন একটি শিল্পে উৎপন্ন সামগ্রীর চাহিদা ও যোগানের সূত্র নীচে দেওয়া হল ঃ

$pq = 100$, $q = 3p + 20$, যেখানে p মূল্য ও q পরিমাণকে প্রকাশ করে। সাম্যাবস্থায় মূল্য ও পরিমাণের মান নির্ণয় করুন। [**উঃ** $3\frac{1}{3}$ একক ; 30 একক]

(17) কোন দ্রব্যের চাহিদা সমীকরণ $p - 3q = 22$ এবং যোগান সমীকরণ $q^2 + 2p + 4q = 100$ যেখানে p দ্রব্যটির দাম এবং q দ্রব্যটির পরিমাণ। তা হলে দ্রব্যটির বাজার ভারসাম্য দাম ও বাজার ভারসাম্য পরিমাণ নির্ণয় করুন।

একক ৫(ক) ❑ বিন্যাস এবং সমবায় (Permutation and Combination)

৫(ক).১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন বিন্যাস ও তার ব্যবহার, সমবায় কী ও তার ব্যবহার, বিন্যাসের সূত্র ও ব্যবহারিক ক্ষেত্রে তার প্রয়োগ।

৫(ক).২ বিন্যাস ও সমবায়—প্রাথমিক ধারণা

বিন্যাস (permutation) : কতিপয় বস্তুর সবকটি অথবা কয়েকটি একটি নির্দিষ্ট ক্রম অনুসারে সাজালে ঐ বিশেষ সজ্জিত অবস্থাকে বিন্যাস (Permutation) বলে। মনে করি a, b দুটি বস্তু। দুটিকে নিয়ে ab এবং ba এই দুটি ক্রমে সাজানো যায়। অর্থাৎ এক্ষেত্রে দুটি বিন্যাস পাওয়া যায়। a, b, c তিনটি বস্তু হ'লে নিম্নলিখিত ছয়টি বিন্যাস পাই : abc, acb, bca, bac, cab, cba, a, b, c থেকে দুটি করে নিয়ে নিম্নলিখিত বিন্যাস পাওয়া যায় : ab, ba, bc, cb, ac, ca.

সমবায় (Combination) : কতিপয় বস্তুর সবকটি অথবা কয়েকটি নিয়ে ক্রম নিরপেক্ষ যে বিভিন্ন দল বা সংকলন করা যায় তার প্রতিটিকে একটি সমবায় বলে।

a ও bকে নিয়ে ক্রম নিরপেক্ষ একটি মাত্র দল ab গঠন করা যায়। (এখানে ab এবং ba একই দল)। a, b, c কে নিয়েও একটি মাত্র দলই গঠন করা যায় অর্থাৎ একটি মাত্র সমবায় সম্ভব। আবার, a, b, c থেকে দুটি ক'রে নিয়ে তিনটি সমবায় ab, bc, ca গঠন করা যায়।

একটি সমবায় থেকে একাধিক বিন্যাস পাওয়া যেতে পারে। যথা ab একটি সমবায়। এটা থেকে দুটি বিন্যাস ab ও ba পাওয়া যায়।

উদা. 1. 2, 5, 7, 9 অঙ্কগুলি থেকে তিনটি ক'রে নিয়ে কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায় যাতে একটি অঙ্ক দুবার নেওয়া যাবে না?

শতকের স্থানে চারটি অঙ্কের যে কোন একটি নিতে পারি অর্থাৎ শতকের স্থানটি চারভাবে পূর্ণ করা যায়। শতকের স্থান পূর্ণ হবার পর দশকের স্থানে তিনটি অঙ্কের যে কোন একটি নেওয়া যায় অর্থাৎ, দশকের স্থান তিনভাবে পূর্ণ করা যায়। অনুরূপে এককের স্থান দুইভাবে পূর্ণ করা যায়। অতএব নির্ণেয় সংখ্যা $4 \times 3 \times 2 = 24$.

যেহেতু একটি সংখ্যা 257-এর ক্রম পরিবর্তন করলে অন্য সংখ্যা পাওয়া যায় সুতরাং এক্ষেত্রে আমাদের বিন্যাস বিবেচনা করতে হবে। তিনটি ক'রে নিয়ে 24টি বিন্যাস পান কিনা দেখুন।

উদা. 2. 5 জন সদস্য থেকে 3 জনকে একটি কমিটিতে কত প্রকারে নির্বাচিত করা যায়?

পাঁচজন সদস্যকে 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্ক দ্বারা চিহ্নিত করা যাক। তিনজনের কমিটি তৈরী করতে হবে। এখানে ক্রম বিবেচনা করা অর্থহীন। নিম্নরূপে কমিটি গঠন করা যায় :

সদস্য : 1 2 3 4 5

কমিটি : 123, 124, 125, 134, 135, 145,

234, 235, 345, 245

যেহেতু এখানে সদস্য নির্বাচন ক্রম-নিরপেক্ষ সুতরাং সমবায় বিবেচনা করতে হবে।

৫(ক).৩ বিন্যাস (Permutation)

উদা. 1 থেকে একটি সূত্র বিবৃত করা যায় :

সূত্র : যদি কোন কাজ m বিভিন্ন প্রকারে করা যায় এবং যদি m প্রকারের মধ্যে যে কোন এক প্রকারে

উক্ত কাজ করা হয় এবং যদি দ্বিতীয় একটি কাজ n উপায়ে করা যায় তবে ঐ দুটি কাজ একটির পর একটি $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারে করা যায় ইত্যাদি।

উদা. 2. 2, 5, 7, 9 চারিটি অঙ্ক থেকে তিনটি অঙ্ক দ্বারা গঠিত কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায়? প্রতিটি সংখ্যা পুনরায় ব্যবহার করা যেতে পারে।

উদা. 1-এর মত শতকের স্থান 4 উপায়ে পূর্ণ করা যায়। যেহেতু একটি অঙ্ককে পুনরায় ব্যবহার করা যায়, দশকের স্থানটিও 4 এবং অনুরূপে এককের স্থানটিও 4 উপায়ে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং নির্ণেয় উপায় $= 4 \times 4 \times 4 = 64$.

৫(ক).৩.১ প্রতিপাদ্য

n-সংখ্যক বস্তু থেকে r সংখ্যক ক'রে বস্তু নিয়ে বিভিন্ন বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় $[r \leq n]$.

এই বিন্যাসের সংখ্যাটিকে ${}^n p_r$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা যায়। কোন বিন্যাসে একটি বস্তু কেবল একবারই থাকতে পারে।

মনে করি, r সংখ্যক ঘর আছে।

1	2	3		r–1	r
n	n–1	n–2			n–(r–1)

প্রথম ঘরে n বস্তুর যে কোন একটিকে রাখতে পারেন এবং এটি n উপায়ে করা যায়। যেহেতু, এই বস্তুটিকে আর ব্যবহার করা যাবে না সুতরাং দ্বিতীয় স্থান $(n-1)$ উপায়ে একটি বস্তু রাখা যায়। অনুরূপে r-ঘরটিতে $n-(r-1)$ উপায়ে একটি বস্তু রাখা যায়। অতএব, n সংখ্যক বস্তু থেকে r-বস্তু ক'রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা পূর্বে বিবৃত সূত্র অনুসারে $n(n-1)...(n-r+1)$

অর্থাৎ, ${}^nP_r = n(n-1)........(n-r+1)$

যদি $r = n$ নেওয়া যায় তবে

${}^nP_n = n(n-1)........2.1 = \underline{|n}$ বা $n!$ এইরূপ চিহ্ন ব্যবহার করা হয় এবং $\underline{|n}$ বা $n!$কে ফ্যাকটোরিয়াল n এইরূপ বলা হয়। $\underline{|o} = 1$ ধরা হয়।

$$\therefore {}^np_r = n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)(n-r)...2.1}{(n-r)(n-r-1)......2.1}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

উদা. 3. $^9P_6 = \frac{\lfloor 9}{\lfloor 9-6} = \frac{\lfloor 9}{\lfloor 3} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}$

দ্রষ্টব্য : $\lfloor n = n.\lfloor n-1$

কারণ $\lfloor n = n.(n-1)(n-2)...3.2.1$

$\lfloor n-1 = (n-1)(n-2)...3.2.1$

$\therefore$ $\lfloor n = n.\lfloor n-1$ অনুরূপে, $\lfloor n = n(n-1).\lfloor n-2$

উদা. $\lfloor 10 = 10.\lfloor 9 = 10.9\lfloor 8$ ইত্যাদি।

৫(ক).৩.২ সবগুলি বিভিন্ন নয় এরূপ বস্তুসমূহের বিন্যাস

প্রতিপাদ্য : সবগুলি বিভিন্ন নয় এরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলিকে একযোগে নিয়ে বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

মনে করি, n-বস্তু n-অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হল যার মধ্যে 'a' p-সংখ্যক, 'b' q-সংখ্যক, এবং 'c' r-সংখ্যক আছে এবং বাকীগুলি বিভিন্ন। মনে করি, x নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা। যদি p-সংখ্যক 'a' বিভিন্ন হত তবে প্রতিটি x বিন্যাসের জন্য এদের নিজেদের বিন্যাস সংখ্যা হত $\lfloor p$. সুতরাং x বিন্যাসের জন্য হত $x\lfloor p$ বিন্যাস যেখানে 'b' q-সংখ্যক এবং 'c' r-সংখ্যক আছে। অনুরূপে q-সংখ্যক 'b' এবং r-সংখ্যক 'c'কেও বিভিন্ন ধরলে x বিন্যাসের জন্য মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r$ অর্থাৎ n বস্তুই যদি বিভিন্ন হত তবে বিন্যাস সংখ্যা হত $x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r$. আবার জানি n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলিকে একযোগে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = $\lfloor n$.

$\therefore$ $x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r = \lfloor n$

বা, $\boxed{x = \frac{\lfloor n}{\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r}}$

উদা. 4. ENGINEERING শব্দটিকে কত প্রকারে সাজান যায়?

এখানে মোট অক্ষর = 11, E = 3টি, N = 3টি, G = 2টি, I = 2টি।

সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস $=\dfrac{\lfloor 11}{\lfloor 3\times\lfloor 3\times\lfloor 2\times\lfloor 2}$

$$=\frac{11\times10\times\cancel{9}\times\cancel{8}\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times1\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1\times\cancel{2}\times1\times\cancel{2}\times1}=2,77,200$$

উদা. 5. FAILURE শব্দের অক্ষরগুলির দ্বারা কতগুলি বিন্যাস করা যেতে পারে যেখানে AEIU সর্বদা একসাথে থাকবে?

(AEIU) কে একটি বস্তু ধরে আমরা FLR(AEIU) এই চারটি বস্তু পাই। এদের বিন্যাস $\lfloor 4$. আবার AEIU কে $\lfloor 4$ বিন্যাসে সাজানো যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস = $\lfloor 4\times\lfloor 4=576$

উদা. 6. n-সংখ্যক বালককে কতভাবে সাজান যায় যাতে সবচেয়ে লম্বা এবং সবচেয়ে বেঁটে বালক একত্রে থাকবে না।

n-সংখ্যক বালককে $\lfloor n$ বিন্যাসে সাজান যায়। সবচেয়ে লম্বা এবং বেঁটে বালকদ্বয় সবসময় একত্রে থাকবে ধরলে বিন্যাস সংখ্যা হবে $\lfloor n-1$. আবার ঐ বালক দুজনাকে 2 ভাবে সাজান যায়। সুতরাং ঐ বালক দুটি সর্বদা একত্রে থাকবে এরূপ বিন্যাসের সংখ্যা $2\lfloor n-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা (যেখানে ঐ বালকদ্বয় একত্রে থাকবে না) = $\lfloor n-2\lfloor n-1$

উদা. 7. 10টি বস্তু থেকে 4টি ক'রে নিয়ে কতগুলি বিন্যাস হবে যাতে (i) একটি নির্দিষ্ট বস্তু সকল বিন্যাসেই থাকবে, (ii) নির্দিষ্ট বস্তুটি কোন বিন্যাসেই থাকবে না।

মনে করতে পারি যে 10টি বস্তু থেকে 4টি বস্তুকে 4টি ঘরে রাখতে হবে। (i) নির্দিষ্ট বস্তুটিকে চারটি ঘরের যে কোন একটিতে 4 ভাবে রাখা যায়। বাকি নয়টি বস্তু থেকে যে কোনও তিনটিকে বাকি তিনটি ঘরে $^9P_3$ ভাবে রাখা যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস = $4\times{}^9P_3$

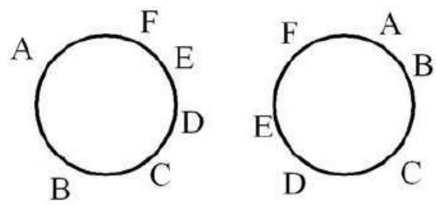
(ii) নির্দিষ্ট বস্তুটি বাদ দিলে থাকে নয়টি বস্তু। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস = $^9P_4=9\times8\times7\times6$

উদা. 8. কত সংখ্যক উপায়ে 6 ব্যক্তিকে বৃত্তাকারে সাজান যায়?

এক ব্যক্তিকে নির্দিষ্ট ক'রে তার সাপেক্ষে অন্য ব্যক্তিদের সাজানো হয়। নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $=\lfloor 5=120$

দ্রষ্টব্য : যদি নির্দিষ্ট ব্যক্তির সাপেক্ষে সাজাবার সময় ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে এবং বিপরীত দিকের মধ্যে কোন তফাৎ না ধরা হয় তবে এই সংখ্যা = $\frac{1}{2}\times120=60.$

মনে করি, 6 ব্যক্তি যথাক্রমে A, B, C, D, E, F. চিত্র দুটিতে আপেক্ষিক অবস্থান অভিন্ন নয়।



৫(ক).৩.৩ প্রশ্নমালা

1) একটি ঘরে 7টি ফাঁকা চেয়ার আছে। 4 জন লোক কত উপায়ে চেয়ারগুলিতে বসতে পারে? [উঃ 840]

2) 1000 এবং 10,000—এর মধ্যে 2, 3, 4, 5, 6, 8 অংকগুলির দ্বারা কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। কোন অঙ্ক একই সংখ্যায় দুবার ব্যবহার করা যাবে না। [উঃ 360]

3) 7টি বস্তু থেকে 3টি ক'রে নিয়ে কতগুলি বিন্যাস হবে যখন একটি নির্দিষ্ট (i) সব বিন্যাসেই থাকবে (ii) কোন বিন্যাসে থাকবে না? [উঃ 120, 90]

4) x বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র এবং y কলা বিভাগের, কত প্রকারে একটি সারিতে দাঁড় করান যায় যাতে কোন দুজন কলা বিভাগের ছাত্র একত্র থাকবে না ($y < x$). [উঃ $\frac{|\underline{x}\,|\underline{x+1}}{|\underline{x-y+1}}$]

5) নীচের শব্দের সবগুলি অক্ষর নিয়ে কতগুলি বিন্যাস সম্ভব?

(i) CALCUTTA [উঃ 5040]

(ii) ELECTRICITY [উঃ 24,94,800]

6) 1000 থেকে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য এরূপ কতগুলি সংখ্যা 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলির দ্বারা গঠিত হতে পারে? একটি অঙ্ক একটি সংখ্যায় একবারের বেশী ব্যবহৃত হবে না। [উঃ 154]

7) A এবং B-এর মাঝে 42টি ষ্টেশন আছে। বিভিন্ন প্রকারের কতগুলি বিভিন্ন রকমের টিকিট ছাপাতে হবে যাতে একজন যাত্রী যে কোন একটি ষ্টেশন থেকে অন্য যে কোন ষ্টেশনে যেতে পারে? [উঃ 1722]

8) প্রমাণ করুন যে, ${}^{n-1}P_r + r\,{}^{n-1}P_{r-1} = {}^{n}P_r$.

9) ${}^{m-n}P_2 = 56$, ${}^{m-n}P_2 = 12$ হলে m এবং n নির্ণয় করুন। [উঃ $m=4$, $n=2$]

10) (i) যদি ${}^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n = 3 : 5$ হয়, তবে n-এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ $n = 4$]

(ii) যদি ${}^{8}P_{n-1} : {}^{9}P_{n-2} = 20 : 9$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $n = 6$.

(iii) $({}^{8}P_2 + {}^{8}P_3) \div {}^{9}P_3 \rightarrow$ এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{7}{9}$]

(iv) প্রমাণ করুন যে, ${}^{2n}P_{2n} = 1.3.5. \ldots (2n-1).2^n.\lfloor n$.

৫(ক).৪ সমবায় (Combination)

সমবায়ের সংজ্ঞা পূর্বেই আলোচিত হয়েছে। nটি বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে rটি $(r \le n)$ বস্তু নিয়ে যতগুলি সমবায় পাওয়া যায় সেই সংখ্যাকে ${}^{n}c_r$ চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়।

প্রতিপাদ্য : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু নিয়ে সমবায় সংখ্যা নির্ণয় $(r \le n)$:

মনে করি, সমবায় সংখ্যা ${}^{n}C_r$. এখন ${}^{n}C_r$ সমবায়ের প্রতিটি সমবায়ে r-সংখ্যক বস্তু আছে এবং তাদের নিয়ে $\lfloor r$ বিন্যাস হবে। সুতরাং ${}^{n}c_r$ সমবায় থেকে যে বিন্যাস পাওয়া যায় তার সংখ্যা $\lfloor r \times {}^{n}c_r$ = n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে rটি করে নিয়ে বিন্যাসের সংখ্যা = ${}^{n}P_r$.

সুতরাং $\lfloor n . \times {}^{n}c_r = {}^{n}P_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$

$$\therefore\ {}^{n}c_r = \boxed{{}^{n}c_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}}$$

$r = n$ হ'লে ${}^{n}c_n = \frac{\lfloor n}{\lfloor n \lfloor o} = 1$ আবার $r = o$ বসালে ${}^{n}c_o = 1$.

$$\therefore\ \boxed{{}^{n}c_n = {}^{n}c_o = 1}$$

দুইটি সম্বন্ধ : ${}^{n}c_r = {}^{n}c_{n-r}$

আমরা জানি, ${}^{n}c_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$ এবং ${}^{n}c_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-(n-r) \lfloor n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$

[দ্রষ্টব্য : যদি ${}^{n}c_p = {}^{n}c_q$ হয়, তবে হয় $p = q$ বা $p + q = n$]

সুতরাং ${}^{n}c_r = {}^{n}c_{n-r}$

(ii) ${}^{n}c_r + {}^{n}c_r = {}^{n+1}c_r$

বামপক্ষ, ${}^{n}c_r + {}^{n}c_{r-1} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}}\,\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{\underline{|n}(n+1)}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}$$

$$= \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}} = {}^{n+1}c_r$$

৫(ক).৪.১ উদাহরণমালা

উদা. 1. 8 জন পুরুষ এবং 6 জন স্ত্রীলোকের মধ্যে থেকে 5 জনার কয়টি বিভিন্ন কমিটি গঠন করা যায়?

মোট 8+6=14 জন থেকে ক্রম নিরপেক্ষ ভাবে যে কোন 5 জনকে নির্বাচিত করতে হবে।

নির্ণেয় কমিটির সংখ্যা = ${}^{14}c_5 = 2002$

উদা. 2. 15টি বালকের একটি দলে 7 জন স্কাউট আছে। কত প্রকারে 12টি বালকের কতগুলি দল গড়া যায় যাতে প্রতি দলে অন্তত 6 জন স্কাউট থাকবে?

দলটিতে 6 জন স্কাউট এবং 6 জন অন্য বালক থাকতে পারে বা 7 জন স্কাউট এবং 5 জন অন্য বালক থাকতে পারে। নির্ণেয় সমবায় = ${}^{7}c_6 \times {}^{8}c_6 + {}^{7}c_7 \times {}^{8}c_5$

$= {}^{7}c_1 \times {}^{8}c_2 + 1 \times {}^{8}c_3 = 7 \times 28 + 56 = 252$

উদা. 3. $(m + n)$ বিভিন্ন বস্তু কত উপায়ে দুটি ভাগে ভাগ করা যায় যাতে একটি ভাগে m বস্তু এবং অপর ভাগে n বস্তু থাকে?

$(m + n)$ বস্তু থেকে m বস্তু নেওয়া যায় $m + n_{c_m}$ উপায়ে। প্রতিটি উপায়ের সঙ্গে দ্বিতীয় একটি ভাগ থাকবে যাতে n বস্তু আছে। সুতরাং নির্ণেয় উপায় $m + n_{c_m}$।

দ্রষ্টব্য : যদি $m = n$ হয় তবে মোট উপায় = $\frac{\underline{|2m}}{\underline{|m}\,\underline{|m}.\underline{|2}}$ কারণ এখানে দুটি ভাগ পরস্পর পাল্টালে কোন নূতন সমবায় পাওয়া যায় না।

যথা, 22 জন ফুটবলারকে 11 জন ক'রে দুটি দলে ভাগ করা যায় $\frac{\lfloor 22}{\lfloor 11 \lfloor 11 \lfloor 2}$ উপায়ে।

উদা. 4. একটি সমতলে n-সংখ্যক বিন্দু আছে যার (i) কোন তিনটি সমরেখ নয় (ii) যার p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখ। কয়টি রেখা এবং কয়টি ত্রিভুজ গঠন করা যাবে এই বিন্দুগুলি দ্বারা?

(i) দুটি বিন্দু দিয়ে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখা $^nc_2$.

(ii) যদি p-সমরেখ বিন্দুর কোন তিনটি সমরেখ না হত তা হলে $^pc_2$ সরলরেখা পাওয়া যেত কিন্তু তার পরিবর্তে p-সংখ্যক বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র সরলরেখা পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $(^pc_2-1)$ এতগুলি সরলরেখা কম হবে।

সুতরাং, সরলরেখার নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^nc_2 - ({}^pc_2-1)$.

ত্রিভুজের সংখ্যা : কোন তিনটি বিন্দু সমরেখ না হলে n-সংখ্যক বিন্দু থেকে $^nc_3$ সংখ্যক ত্রিভুজ পাওয়া যায়। আবার p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখ হলে $^pc_3$ সংখ্যক ত্রিভুজ কম হবে।

$\therefore$ উৎপন্ন ত্রিভুজ সংখ্যা $= {}^nc_3 - {}^pc_3$.

উদা. 5. n-সংখ্যক বস্তু থেকে এক যোগে যতগুলি ইচ্ছা বস্তু নিয়ে সমবায় সংখ্যা নির্ণয়।

প্রতি নির্বাচনে দুইটি প্রক্রিয়া সম্ভব (i) বস্তুটি নির্বাচিত হতে পারে অথবা (ii) বস্তুটি নির্বাচিত না হতে পারে। প্রদত্ত n বস্তুর প্রতিটির ক্ষেত্রে 2 প্রকার প্রক্রিয়া হবে।

সুতরাং মোট প্রক্রিয়া সংখ্যা $= 2\times2\times2...n$ সংখ্যক উৎপাদক।

$= 2^n$-এর মধ্যে একটি প্রক্রিয়া আছে যাতে সব বস্তুই পরিত্যক্ত। সুতরাং নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= 2^n-1$.

৫(ক).৫ অনুশীলনী

1) (i) যদি $^nc_8 : {}^nc_6 = \frac{15}{28}$ হয়, তবে n নির্ণয় করুন। [উঃ 12]

(ii) যদি $^{18}c_r = {}^{18}c_{r+2}$ হয় তবে r এবং $^{11}c_r$-এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ 165]

2) একটি প্রশ্নপত্রের 10টি প্রশ্নের মধ্যে একজন পরীক্ষার্থী কত উপায়ে 7টি প্রশ্ন বাছতে পারে? [উঃ 120]

3) 10 জন ছাত্র এবং 15 জন ছাত্রী থেকে কত উপায়ে 7 জনার একটি কমিটি গড়া যায় যাতে প্রতি কমিটিতে অন্তত 4 জন ছাত্র থাকবে? [উঃ 1,25,265]

4) 12 জন লোককে কত উপায়ে দুটি ভাগে ভাগ করা যায়? [উঃ 2,047]

5) এক ব্যক্তির 50 জন বন্ধু আছে। সে কত উপায়ে এক অথবা 6 বেশি বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারে? [উঃ 31]

6) প্রমাণ করুন যে, ${}^{n}c_{r} = \frac{n-r+1}{r}\,{}^{n}c_{r-1}$

7) 21টি ম্যাচের ফলাফল (জয়, পরাজয় বা ড্র) বলতে হবে। কতগুলি বিভিন্ন পূর্বাভাসে ঠিক 18টি সঠিক ফল থাকবে? [উঃ 10,640]

8) কোন সমতলে 10টি বিন্দু আছে তার মধ্যে 4টি বিন্দু সমরেখ এবং বাকীগুলির কোন তিনটি সমরেখ নয়। বিন্দুগুলি যোগ ক'রে—

(i) কতগুলি ত্রিভুজ পাওয়া যাবে? [উঃ 116]

(ii) কতগুলি সরলরেখা পাওয়া যাবে? [উঃ 40]

একক ৫(খ) ❑ দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem)

গঠন

৫(খ).১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি দ্বিপদ রাশি ও দ্বিপদ উপপাদ্য কী ও তার ব্যবহার, বিস্তৃতি কী, ভগ্নাংশ বা ধনাত্মক সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য ও তার ব্যবহার সম্পর্কে সম্যকভাবে জানতে পারবেন।

৫(খ).২ দ্বিপদ রাশি ও দ্বিপদ উপপাদ্য

কোন রাশিতে দুটি পদ থাকলে তাকে **দ্বিপদ রাশি** বলে। যথা $ax + b$, $a + x$ ইত্যাদি। আমরা জানি $(a + x)^2 = a^2\ 2ax + x^2$ বা, $(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$. এখন. $(a + x)^n$ এর মান, যখন n খুব বড় (যেমন $x = 50$ বা 100) নির্ণয় করা দুরূহ ব্যাপার। স্যার আইজাক নিউটন কোন

দ্বিপদ রাশির যে কোন ধনাত্মক ঘাতের বিস্তার নির্ণয়ের একটি সাধারণ সূত্র বর্ণনা করেন। এই সূত্রকে **দ্বিপদ উপপাদ্য** (Binomial Theorem) বলে।

দ্বিপদ উপপাদ্য : যদি n ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয় তবে,

$$(a+x)^n = {}^nc_0\, a^n + {}^nc_1\, a^{n-1}\, x + {}^nc_2\, a^{n-2}\, x^2 + \ldots + {}^nc_r\, a^{n.r}\, x^r + \ldots + {}^nc_n\, x^n \quad (1)$$

${}^nc_0, {}^nc_1, {}^nc_2 \ldots {}^nc_r \ldots {}^nc_n$ কে **দ্বিপদ সহগ** বলে। (Binomial co-efficients)

(1) এ $a = 1$ বসালে পাই,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nc_1\, x + {}^nc_2 x^2 + \ldots + {}^nc_r\, x^r + \ldots + x^n \ \ldots\ldots(2)$$

৫(খ).২.১ বিস্তৃতির সমদূরবর্তী পদ (Equidistant Term)

প্রতিপাদ্য : কোন বিস্তৃতির শুরু থেকে এবং শেষ থেকে সমদূরবর্তী দুটি পদের দ্বিপদ সহগসমূহ সমান।

শুরু থেকে $(r + 1)$-তম পদের সহগ $= {}^nc_r$. আবার শেষ থেকে $(r+1)$-তম পদের সহগ = শুরু থেকে $(n+1-r)$-তম পদের সহগ। $(n + 1 - r)$-তম পদের সহগ $= {}^nc_{n-r}$

আমরা জানি, ${}^nc_r = {}^nc_{n-r}$ সুতরাং প্রতিপাদ্যটি প্রমাণিত।

৫(খ).২.২ উদাহরণমালা

উদা. 1. $(2x+3)^6$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

$$\begin{aligned}(2x+3)^6 &= (2x)^6 + {}^6c_1\,(2x)^5.3 + {}^6c_2.(2x)^4.3^2 + {}^6c_3(2x)^3.3^3 + {}^6c_4(2x)^2.3^4 \\ &\quad + {}^6c_5(2x).3^5 + {}^6c_6.3^6 \\ &= 64x^6 + 576x^5 + 2160x^4 + 4320x^3 + 4860x^2 + 2916x + 729\end{aligned}$$

উদা. 2. $\left(x^3 - \dfrac{1}{2x^2}\right)^5$ -এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

$$\begin{aligned}\left(x^3 - \frac{1}{2x^2}\right)^5 &= (x^3)^5 + {}^5c_1 (x^3)^4 \left(\frac{-1}{2x^2}\right) + {}^5c_2 (x^3)^3 \left(\frac{-1}{2x^2}\right)^2 \\ &\quad + {}^5c_3 (x^3)^2 \left(\frac{-1}{2x^2}\right)^3 + {}^5c_4 (x^3) \left(\frac{-1}{2x^2}\right)^4 + {}^5c_5 \left(\frac{-1}{2x^2}\right)^5 \\ &= x^{15} - \frac{5}{2}x^{10} + \frac{5}{2}x^5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16x^5} - \frac{1}{32x^{10}}\end{aligned}$$

উদা. 3. $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{11}$ -এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় করুন।

মোট পদের সংখ্যা = 11 + 1 = 12. সুতরাং 6-তম পদ এবং 7-তম পদ দুটি মধ্যপদ।

6-তম পদ = ${}^{11}c_5\ (x^2)^6.\left(\frac{-2}{x}\right)^5 = 14784x^7$

7-তম পদ = ${}^{11}c_6(x^2)^5.\left(\frac{-2}{x}\right)^6 = 29568x^4$

উদা. 4. $(2x^2 - x)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে x^{16}-এর সহগ নির্ণয় করুন।

মনে করি $(r + 1)$-তম পদে x^{16} আছে। এখন $(r + 1)$তম পদ = ${}^{10}c_r.(2x^2)^{10-r}.(-x)^r$

$= {}^{10}c_r.2^{10-r}\,x^{20-2r-r}$. প্রশ্নানুসারে $20 - r = 16 \quad \therefore r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ = ${}^{10}c_4.2^6(-1)^4 = 13440$

উদা. 5. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ -এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদ নির্ণয় করুন।

মনে করি, $(r + 1)$-তম পদ x-বর্জিত।

এখন $(r+1)$-তম পদ = ${}^{2n}c_r x^{2n-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}^{2n}c_r.(-1)^r.x^{2n-2r}$

প্রশ্নানুসারে, $2(n - r) = 0$ বা, $r = n$.

সুতরাং নির্ণেয় পদ = $(-1)^n.{}^{2n}c_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}.(-1)^n$

উদা. 6. $(.999)^4$-এর 3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধমান নির্ণয় করুন। (দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে)

$(.999)^4 = (1 - .001)^4 = 1 - {}^4c_1 \times (.001) + {}^4c_2 \times (.001)^2 - .....$

$= 1 - 4 \times .001 + 6 \times .000001 + ...$

$= 1 - .004 = .996$

৫(খ).২.৩ প্রশ্নমালা

1) বিস্তার করুন :

(i) $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^7$ [উঃ $x^{14} - 7x^{11} + 21x^8 - 35x^5 + 35x^2 - \dfrac{21}{x}+\dfrac{1}{x^5}-\dfrac{1}{x^7}$]

(ii) $\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{2x}\right)^6$

2) সপ্তমপদ নির্ণয় করুন : $(2x - 1)^{11}$ [উঃ $14784x^5$]

3) মধ্যপদ নির্ণয় করুন : $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n-1}$ [উঃ $(-1)^{n-1}.\dfrac{\underline{|2n-1}}{\underline{|n}\underline{|n-1}}$]

4) মধ্যপদ দুটি নির্ণয় করুন : $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^9$ [উঃ $4032x^6$, $-4032x^3$]

5) $\left(x^3-\dfrac{1}{3x^4}\right)^{27}$ -এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় করুন। [উঃ $-\dfrac{\underline{|27}}{\underline{|13}\underline{|14}.3^{13}}$]

6) $\left(\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{2}{3x^2}\right)^{15}$ -এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় করুন। [উঃ $\dfrac{40040}{27}$]

7) $\left(2x-\dfrac{1}{4x^2}\right)^9$ -এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় করুন। [উঃ 84]

8) $(1 + x)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতিতে যদি x^r এবং x^{r+1} এর সহগ সমান হয়, তবে r নির্ণয় করুন। [উঃ (n+1)]

9) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{3n+1}$ -এর বিস্তৃতিতে x^{n+1}-এর সহগ নির্ণয় করুন। [উঃ $\dfrac{\underline{|3n+1}}{\underline{|n}+\underline{|2n+1}}$]

10) $(1+3x)^n$-এর বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ প্রান্ত থেকে p-তম পদদ্বয় নির্ণয় করুন।

$$\left[\frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+2)3^{p-1}x^{p-1}}{\underline{|(p-1)}}\right]$$

11) মধ্যপদ বা পদদ্বয় নির্ণয় করুন :

(i) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ [উঃ –252]

(ii) $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$ [উঃ 252]

12) প্রমাণ করুন যে $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ $(1 + x)^{2n-1}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগের দ্বিগুণ।

13) $(1 + x)^m \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ -এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\underline{|n}}$]

14) প্রমাণ করুন যে $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদের সহগটি $(1+x)^{2n-1}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ দুটির সহগদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

15) $(1.03)^{10}$-এর চারটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে মান নির্ণয় করুন।

[উঃ 1.3439]

16) $(2+\sqrt{3})^7$ এবং $(2-\sqrt{3})^7$ -এর যোগফল এবং গুণফল নির্ণয় করুন। [উঃ 10,084]

৫(খ).৩ দ্বিপদ সহগের ধর্ম (Properties of Binomial Coefficients)

আমরা জানি, $(1+x)^n = 1 + {}^nc_1x + {}^nc_2x^2+...+{}^nc_rx^r + ... + {}^nc_nx^n$

$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_rx^r + ... + c_nx^n. \quad ... (1)$$

এখানে $c_r = {}^nc_r$.(1)-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই—

$2^n = c_0 + c_1 + c_2 ... + c_n =$ সহগের যোগফল।

$$\therefore {}^nc_1 + {}^nc_2 + \ldots + {}^nc_n = 2^n - c_0$$

$$= {}_2{}^n - 1, \ldots (2) = n\text{-বস্তুর মোট সমবায়।}$$

(1)-এ $x = -1$ বসালে পাই—

$$0 = 1 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + \ldots$$

$$\therefore c_1 + c_3 + c_5 + \ldots = c_2 + c_4 + \ldots$$

সুতরাং অযুগ্ম সহগের যোগফল = যুগ্ম সহগের যোগফল

$$\therefore c_1 + c_3 + c_5 + \ldots = c_2 + c_4 + \ldots = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1} \ \ldots\ldots (3)$$

(1)-এ x-এর জায়গায় $\frac{1}{x}$ বসালে পাই—

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n}$$

$$\therefore (1+x)^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^n = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n \times \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n}\right)$$

ডানপক্ষে x-বর্জিত পদ = $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2$

বামবক্ষে x-বর্জিত পদ = $\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$ -এ x-বর্জিত পদ

$= (1+x)^{2n}$ এ x^n-এর সহগ

$$= {}^{2n}c_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$$

$$\therefore c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2 = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n} \ldots\ldots (4)$$

৫(খ).৩.১ উদাহরণমালা

উদা. 1. যদি $(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n$ তবে $\frac{c_0}{1}+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\frac{c_3}{4}+...$এর মান নির্ণয় করুন।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = 1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{\underline{|3}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|4}}+...+\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[(n+1)+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}+\frac{(n+1)n(n-1)}{\underline{|3}}+...+1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\left\{1+(n+1)+\frac{(n+1)n}{\underline{|2}}+\frac{(n+1)n(n-1)}{\underline{|3}}+...+1\right\}-1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\{[1+1]^{n+1}-1\} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

উদা. 2. যদি $(1 + x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $c_0 + 3c_1 + 5c_3 + ... + (2n + 1)c_n = (n + 1)2^n$

মনে করি, $S = c_0 + 3c_1 + 5c_3 + ... + (2n + 1)c_n$ ....(1)

বিপরীতক্রমে সাজিয়ে লিখে পাই—

$S = (2n + 1)c_0 + (2n - 1)c_1 + (2n - 3)c_2 + ... + c_n$ ....(2)

কারণ $c_n = c_0$, $c_{n-1} = c_1$ ইত্যাদি।

$$(1) + (2),\ 2S = (2n + 2)c_0 + (2n + 2)c_1 + (2n + 2)c_2 + ... + (2n + 2)c_n$$
$$= 2(n + 1)\ [c_0 + c_1 + ... + c_n]$$
$$= 2(n + 1).2^n$$

$\therefore S = (n + 1)2^n$

৫(খ).৩.২ প্রশ্নমালা

1) যদি $(1 + x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n$ হয় তবে দেখান যে,

(i) $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + ... + nc_n = n.2^{n-1}$

(ii) $c_1 - 2c_2 + 3c_3 + ... + n(-1)^{n-1}c_n = 0$

(iii) $c_0 + 2c_1 + 3c_2 + ... + (n+1)c_n = 2^n + n2^{n-1}$

(iv) $c_0 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{4} + ... + (-1)^n \frac{c_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

(v) $c_0c_n + c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + ... + c_n.c_0 = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$

(vi) $\frac{c_0}{1} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_4}{5} + ... = \frac{2^n}{n+1}$

(vii) $\frac{c_1}{c_0} + \frac{2c_2}{c_1} + \frac{3c_3}{c_2} + ... + \frac{nc_n}{c_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$

৫(খ).৪ ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem for Fractional and Negative Indices.)

ভগ্নাংশ ও ঋণাত্মক সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য

যদি $|x| < 1$ অর্থাৎ $-1 < x < 1$ হয় তবে n-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^2 + ... + \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{\lfloor r} x^r + ...\infty...(1)$$

যদি n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে রাশিটির শেষ পদ থাকবে অন্যথায় শেষ পদ থাকবে না। $|x| < 1$ হলে (1)-এর ডানপক্ষ অভিসারী হবে। একে **অসীম দ্বিপদ শ্রেণী** বলে।

প্রমাণ এই পর্যায়ের বাইরে।

৫(খ).৫ উদাহরণমালা

উদা. 1. $(1 + x)^{-2}$-এর প্রথম চারটি পদ নির্ণয় করুন।

$$(1+x)^{-2} = 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{1.2} x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{1.2.3} x^3 + ...$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...$$

উদা. 2. $(1-x)^{-1} = 1 + (-1)(-x) + \dfrac{(-1)(-2)}{1.2}(-x)^2 + \dfrac{(-1)(-2)(-3)}{1.2.3}(-x)^3 + \ldots$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots$$

উদা. 3. $(1-x)^{-2} = 1 + (-2)(-x) + \dfrac{(-2)(-3)}{1.2}(-x)^2 + \dfrac{(-2)(-3)(-4)}{1.2.3}(-x)^3 + \ldots$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (r+1)x^r + \ldots\ldots$$

উদা. 4. $(1-x)^{-n} = 1 + (-n)(-x) + \dfrac{(-n)(-n-1)}{\underline{|2}}(-x)^2 + \ldots + \dfrac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-r+1)}{\underline{|r}}(-x)^r + \ldots$

$$= 1 + nx + \frac{n(n+1)}{\underline{|2}}x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{\underline{|r}}x^r + \ldots$$

উদা. 5. $(1-x)^{-3} = 1 + (-3)(-x) + \dfrac{(-3)(-4)}{1.2}(-x)^2$

$$= 1 + 3x + 6x^2 + \ldots + \frac{(r+1)(r+2)}{\underline{|r}}x^r + \ldots$$

উদা. 6. 1001-এর তৃতীয় মূল নির্ণয় করুন :

$$\sqrt[3]{1001} = (1001)^{1/3} = (10^3+1)^{1/3} = 10\left(1+\frac{1}{10^3}\right)^{1/3}$$

$$= 10\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}\left(\frac{1}{10^3}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= 10\left(1 + \frac{\cdot 001}{3} - \frac{\cdot 000001}{9} + \ldots\right)$$

$$= 10(1+\cdot 00033) = 10\cdot 0033.$$

উদা. 7. বিস্তার করুন : $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1+x)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{1.2}.x^4+\ldots\right)$$

$$= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{8}x^4+\ldots$$

উদা. 8. বিস্তার করুন : $\frac{1}{1+x+x^2}$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)(1-x^3)^{-1}$$

$$= (1-x)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots+(x^3)^r+\ldots$$

$$= 1 - \mathrm{x} + \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^6 - \mathrm{x}^7 + \ldots$$

উদা. 9. প্রমাণ করুন যে,

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = 1-n\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\ldots$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = \left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{-1}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = \left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{-1} = 1+n\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\ldots$$

উদা. 10. যদি $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\infty$ তবে x-কে y-এর সাপেক্ষে তিন পদ পর্যন্ত নির্ণয় করুন :

$$y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

$$\therefore\ 1 + y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

$$= (1-x)^{-2} \therefore 1+y = \frac{1}{(1-x)^2} \therefore (1-x)^2 = \frac{1}{1+y}$$

বা, $1-x = (1+y)^{\frac{-1}{2}} = 1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2-\frac{5}{16}y^3+\ldots$

বা, $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - ...$

৫(খ).৬ অনুশীলনী

1) প্রথম চারটি পদ নির্ণয় করুন : $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ [উঃ $1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 ...$]

2) $(r+1)$-তম পদ নির্ণয় করুন : $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ [উঃ $(-1)^r \frac{1.3.5...(2r-1)}{\underline{|r}} x^r$]

3) পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় করুন :

(i) $\sqrt{24}$ [উঃ 4·89898]

(ii) $\sqrt[3]{998}$ [উঃ 9·99333]

4) $(1 + x + x^2 + ...)^{-n}$ এর x^n-এর সহগ নির্ণয় করুন। [উঃ $(-1)^n$]

5) দেখান যে $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$

6) যদি $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + ... \infty$ হয়, তবে দেখান যে

$x = y + y^2 + y^3 + ... \infty$

7) দেখান যে, $\sqrt{3} = 1 + \frac{1.2}{2.3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + ...\infty$

8) ·5কে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীতে প্রকাশ করুন এবং ভগ্নাংশে এর মান নির্ণয় করুন।

[উঃ $\frac{5}{9}$]

একক ৫(গ) ❑ লগারিদম্ (Logarithm)

গঠন

৫(গ).১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি লগারিদম্ কী ও তার ব্যবহার, লগারিদমের বিভিন্ন সূত্র। বিপরীত লগারিদম্ কী ও তার ব্যবহারিক দিক জানতে পারবেন।

৫(গ).২ লগারিদ্‌ম্ (Logarithm) কী?

আমরা জানি, $3^4 = 81$. এখানে 3-কে নিধান (base) এবং 4-কে সূচক বলা হয়। এখন 4 এবং 81-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে বলা হলে, 4কে 81-এর লগারিদ্‌ম্ যখন নিধান 3 বলা হয় এবং লেখা হয় $4 = \log_3 81$.

যদি $a^x = N$ ($a > 0$, $a \neq 1$) হয়, তবে x-কে নিধান (base) a এর সাপেক্ষে N-এর লগারিদ্‌ম্ বলা যায় এবং $x = \log_a N$ লেখা হয়। মনে রাখা দরকার N কখনো ঋণাত্মক বা শূন্য হতে পারে না। N ধনাত্মক সংখ্যাটিকে a নিধান সাপেক্ষে x-এর অ্যান্টিলগারিদ্‌ম্ বলে এবং লেখা হয় $N = \text{antilog}_a x$.

আমরা জানি, (i) $a^0 = 1 \quad \therefore \boxed{\log_a 1 = 0}$

(ii) $a^1 = a \;\therefore \boxed{\log_a a = 1}$

অর্থাৎ যা নিধান তার লগারিদ্‌ম্ সর্বদা 1।

(iii) $a^{-1} = \dfrac{1}{a} \therefore \log_a \left(\dfrac{1}{a}\right) = -1$

(iv) $a^x = N$ হলে $x = \log_a N$

x-এর মান বসালে পাই $a^{\log_a N} = N$

আমরা জানি, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$..... ইত্যাদি।

$\therefore \log_{10} 100 = 2$, $\log_{10} 1000 = 3$. .....$x > y$ হলে $\log_a x > \log_a y$. a যে কোন ধনাত্মক নিধান।

লগারিদ্‌ম্-এর আলোচনায় নিধান জানা থাকলে বারবার নিধান লেখবার প্রয়োজন নেই। যখন লগারিদ্‌মের নিধান 10 তখন বলা হয় সাধারণ লগারিদ্‌ম্।

৫(গ).২.১ লগারিদ্‌ম্-এর কতিপয় সূত্র

(i) $\log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n$

মনে করি, $\log_a m = x$ এবং $\log_a n = y$ সুতরাং $a^x = m$ এবং $a^y = n$.

$\therefore m \times n = a^x . a^y = a^{x+y}$

সংজ্ঞা থেকে পাই $\log_a (m \times n) = x + y = \log_a m + \log_a n$

অনুরূপে, $\log_a(m \times n \times p) = \log_a n + \log_a p$ ইত্যাদি।

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(i) থেকে পাই $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\therefore\ \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x - y = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a(m^n) = n\log_a m$

মনে করি, $\log_a^m = x \quad \therefore\ a^x = m$

এখন $m^n = (a^x)^n = a^{nx}$

$\therefore\ \log_a m^n = nx = n\log_a m.$

(iv) $\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$ —একে নিধান পরিবর্তন বলে।

মনে করি, $\log_b^m = y \quad \therefore\ b^y = m$ এবং $\log_a^m = x$

$\therefore\ a^x = m$ অর্থাৎ $b^y = a^x \quad \therefore\ b = a^{\frac{x}{y}}$

$\therefore\ \frac{x}{y} = \log_a b = \frac{\log_a m}{\log_b m}$

$\therefore\ \log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}.$

$m = a$ বসালে পাই $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$

৫(গ).২.২ উদাহরণমালা

উদা. 1. $\log 66 = \log(2\times3\times11) = \log 2 + \log 3 + \log 11$

উদা. 2. $\log 6\frac{4}{11} = \log\frac{70}{11} = \log\frac{7\times5\times2}{11}$

$= \log 7 + \log 5 + \log 2 - \log 11$

এখানে নিধান লেখা হয়নি।

উদা. 3. $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2$

উদা. 4. প্রমাণ করুন যে, $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1$

বামপক্ষ $= \frac{\log_a a}{\cancel{\log_a b}} \times \frac{\cancel{\log_a b}}{\cancel{\log_a c}} \times \cancel{\log_a c} = 1$

উদা. 5. 144-এর লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয় করুন যখন নিধান $2\sqrt{3}$.

মনে করি, x নির্ণেয় লগারিদ্‌ম্‌। সুতরাং $(2\sqrt{3})^x = 144$

বা, $(2\sqrt{3})^x = 2^4 \times 3^2 = (2\sqrt{3})^4 \quad \therefore x = 4.$

উদা. 6. সরল করুন : $\log\frac{\sqrt{a^3.b^{-2}}}{b^2c^5}$

$$\log\frac{\sqrt{a^3.b^{-2}}}{b^2c^5} = \log\frac{a^{3/2}.b^{-1}}{b^2c^5} = \log\frac{a^{3/2}}{b^3c^5}$$

$$= \frac{3}{2}\log a - \log(b^3c^5) = \frac{3}{2}\log a - \log b^3 - \log c^5$$

$$= \frac{3}{2}\log a - 3\log b - 5\log c$$

উদা. 7. যদি $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ হয়, দেখান যে $x^x y^y z^z = 1$

মনে করি, প্রত্যেকটি অনুপাত $= k$

$$\therefore \frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y} = k$$

বা, $\frac{x\log x}{x(y-z)} = \frac{y\log y}{y(z-x)} = \frac{z\log z}{z(x-y)} = k$

$$\therefore \log x^x = kx(y-z), \log y^y = ky(z-x), \log z^z = k(x-y)$$

$\therefore \log x^x + \log y^y + \log z^z = 0$

বা, $\log(x^x \times y^y \times z^z) = 0 = \log 1$

$\therefore x^x \times y^y \times z^z = 1$

উদা. 8. যে সংখ্যাটির লগারিদম্ $\frac{1}{2}$ যখন নিধান 9 সেই সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।

মনে করি, নির্ণেয় সংখ্যা N.

$\therefore \log_9 N = \frac{1}{2}$ বা, $9^{\frac{1}{2}} = N$ বা, N = 3.

উদা. 9. Antilog$_5$3 নির্ণয় করুন।

মনে করি, $x = \text{antilog}_5 3 \quad \therefore x = 5^3 = 125$

উদা. 10. $\log_x(8x - 3) - \log_x 4 = 2$ হলে x নির্ণয় করুন।

এখানে, $\log_x \frac{8x-3}{4} = 2. \quad \therefore x^2 = \frac{8x-3}{4}$

বা, $4x^2 - 8x + 3 = 0$ বা, $(2x - 3)(2x - 1) = 0$

$\therefore \quad x = \frac{3}{2}$ বা, $\frac{1}{2}$.

৫(গ).২.৩ প্রশ্নমালা

(1) 512-এর লগারিদম্ নির্ণয় করুন যখন নিধান $2\sqrt{2}$. [উঃ 6]

(2) প্রমাণ করুন : $\log_a x \times \log_b y = \log_b x \times \log_a y$

(3) প্রমাণ করুন : $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$.

(4) $\log a$, $\log b$, $\log c$-এর সাপেক্ষে $\log \frac{a^3\sqrt{b^3c^5}}{\sqrt{a^{\frac{-3}{2}}b^5a^{\frac{-2}{3}}}}$ কে সরল করুন।

[উঃ $\frac{15}{4}\log a - \log b + \frac{17}{3}\log c$]

(5) যদি $\log_a b = 10$ এবং $\log_{6a}(32b) = 5$ হয় তবে a নির্ণয় করুন। [উঃ a = 3]

(6) যদি $\log_{10}2 = \cdot 3010$, $\log_{10}3 = \cdot 4771$, $\log_{10}7 = \cdot 8451$ হয় তবে দেখান যে,

(i) $\log_{10}108 = 2.0333$ (ii) $\log_{10}\sqrt[3]{5} = \cdot 2330$.

(7) দেখান যে $\log_3 \log_2 \log_2 256 = 1$

(8) প্রমাণ করুন যে $\log_{10}^{2} > \cdot 3$.

(9) যদি $\log_p x = a$ এবং $\log_q x = b$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $\log_{p/q} x = \frac{ab}{b-a}$.

(10) a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকলে প্রমাণ করুন যে, $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ বিপরীত প্রগতিতে থাকবে।

(11) $a = \log_x (yz)$, $b = \log_y (zx)$ এবং $c = \log_{z(xy)}$ হলে দেখান যে—

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1 (xyz \neq 1)$$

(12) যদি x ধনাত্মক এবং 1 অপেক্ষা ছোট হয়, তবে দেখান যে,

$$\log (1 + x) + \log (1 + x^2) + \log (1 + x^4) + \log (1 + x^8) + \ldots \infty$$
$$= -\log (1 - x).$$

৫(গ).৩ সাধারণ লগারিদম্ (Common Logarithms)

যদি নিধান 10 হয়, তবে লগারিদম্‌কে সাধারণ লগারিদম্ বলে। যদি কোন নিধান লেখা না থাকে তবে নিধান 10 ধরতে হবে। অর্থাৎ $\log_{10}3$ বোঝাতে লেখা হয় log3।

মনে রাখতে হবে বর্তমান আলোচনায় কেবল ধনাত্মক সংখ্যা সমূহেরই লগারিদম্ নির্ণয় করা হবে।

পূর্ণক (Characteristic) এবং অংশক (Mantisa)

আমরা জানি, $\log_{10}^{10} = 1$ এবং $\log_{10}^{100} = 2$

$\therefore$ 10 থেকে বড় এবং 100 থেকে ছোট যে কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্ 1 থেকে বড় এবং 2 থেকে ছোট হবে। সুতরাং $10 < x < 100$ হলে $1 < \log_{10}^{x} < 2$ সুতরাং $\log_{10}x$-এর মান 1 এবং একটি প্রকৃত ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশের যোগফল হবে। অনুরূপে প্রত্যেক সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্ একটি অখণ্ড সংখ্যা 3 একটি প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশের যোগফল হয়। লগারিদমের অখণ্ড অংশকে **পূর্ণক** (Characteristic) এবং ধনাত্মক দশমিক অংশকে **অংশক** (Mantisa) বলে।

উদা. $\log 33{\cdot}9 = 1{\cdot}5289$ এখানে 1পূর্ণক এবং ·5289 অংশক।

৫(গ).৩.১ পূর্ণক নির্ণয়ের প্রণালী

আমরা জানি, যখন $10 < x < 100$ তখন $\log_{10}^{x}$ -এর পূর্ণক 1, অর্থাৎ দুই অঙ্কের যে কোন সংখ্যার পূর্ণক 1. যথা log53-এর পূর্ণক 1, log 79·21-এর পূর্ণক 1, কারণ সংখ্যাটির অখণ্ড অংশ দুই অঙ্কের।

অনুরূপে, যে সকল সংখ্যার অখণ্ড অংশ তিন অঙ্কের তাদের লগারিদ্‌মের পূর্ণক 2. অনুরূপে কোন সংখ্যার অখণ্ড অংশের অঙ্ক সংখ্যা যত তা অপেক্ষা 1 কম হবে তার লগারিদ্‌ম্ এর পূর্ণক log 1·98-এর পূর্ণক 0 ইত্যাদি।

1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদ্‌ম্-এর পূর্ণক :

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = \cdot 1 \quad \therefore \log \cdot 1 = -1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = \cdot 01 \quad \therefore \log \cdot 01 = -2 \text{ ইত্যাদি।}$$

মনে করি, log·04 = –2+ দশমিকাংশ। এর পূর্ণক ঋণাত্মক এবং অংশক ধনাত্মক। সুতরাং **দশমিক বিন্দুর পরে যতগুলি শূন্য থাকবে সেই শূন্য সংখ্যা অপেক্ষা পূর্ণক 1 বেশী এবং তা ঋণাত্মক হবে।**

যে সকল সংখ্যার সার্থক অঙ্কগুলি সমান শুধু দশমিকের স্থান পৃথক তাদের লগের অংশক সমান।

যথা, 5·378, ·005378, 5378, 537·8 সংখ্যাগুলি সমান যখন দশমিক বিন্দু থাকবে না এবং এদের লগের অংশক সমান হবে।

৫(গ).৩.২ অংশক নির্ণয়ের পদ্ধতি

5·378-এর অংশক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে লগ তালিকার অন্তিম বাম প্রান্তিক স্তম্ভে 53 সংখ্যাটি বের করুন। এখন এর দক্ষিণে অনুভূমিক রেখা বরাবর সেই স্তম্ভ পর্যন্ত যেতে হবে যার শীর্ষে 7 আছে এবং সংখ্যাটি পাওয়া গেল 72997. চতুর্থ অঙ্ক 8-এর জন্য মধ্যক-পার্থক্য তালিকার এবং তার যে স্তম্ভে 8 আছে তা যে অনুভূমিক সারি বাম প্রান্তে 53 আছে সেইখানে 65 দেখা যাবে। এখানে log 5·378-এর অংশক হবে

$$\begin{array}{r} \cdot 72997 \\ +\ 65 \\ \hline \cdot 73062 \end{array}$$

সুতরাং log5·378 = 0·73062. এখানে পূর্ণক (1 – 1) = 0

দ্রষ্টব্য : log·002 = –3 + ·3010 = $\bar{3}$·3010

৫(গ).৪ অ্যান্টিলগারিদ্‌ম্ বা অ্যান্টিলগ বা বিপরীত লগারিদ্‌ম্ (Anti Logarithm বা Antilog)

মনে করি, কোন সংখ্যা x-এর লগ y হয় তবে y-কে x-এর অ্যান্টিলগ বলে।

আমরা জানি log2 = ·30103 সুতরাং ·30103-এর অ্যান্টিলগ 2.

৫(গ).৪.১ উদাহরণমালা

উদা. 1. অ্যান্টিলগ 2·5736 নির্ণয় করুন।

পূর্ণক 2-কে না ধ'রে কেবল অংশক ·5736-কে নিয়ে অ্যান্টিলগ-তালিকা দেখতে হবে। পূর্বে লগ-তালিকা দেখবার নিয়ম এখানেও প্রয়োজন। অ্যান্টিলগ-তালিকা থেকে পাই,

$$\begin{array}{r} 37411 \\ 52 \\ \hline 37463 \end{array}$$

এখানে পূর্ণক 2 সুতরাং অখণ্ড অংশে তিনটি অঙ্ক আছে।

সুতরাং অ্যান্টিলগ 2·5736 = 374·63.

উদা. 2. অ্যান্টিলগ $\bar{2}$·5736 নির্ণয় করুন।

অ্যান্টিলগ তালিকা থেকে 5736-এর ক্ষেত্রে পাই 3746. যেহেতু পূর্ণক –2 সুতরাং অ্যান্টিলগ $\bar{2}\cdot5736 = \cdot03746$.

উদা. 3. 5^{25}-এ কতগুলি অঙ্ক আছে? দেওয়া আছে log2 = ·30103

$$\log 5^{25} = 25\log 5 = 25\log\frac{10}{2} = 25(\log 10 - \log 2)$$
$$= 25(1 - \cdot30103)$$
$$= 25 \times \cdot69897 = 17\cdot47425$$

সুতরাং নির্ণেয় অঙ্কের সংখ্যা = 17 + 1 = 18.

উদা. 4. মান নির্ণয় করুন : $\sqrt{(7\cdot2\times(6\cdot3)\big/_{62\cdot5}}$

দেওয়া আছে log2 = ·3010300, log3 = ·4771213, log7 = ·8450980

মনে করি, N নির্ণেয় মান।

$$\therefore \log N = \left(\frac{7\cdot2\times6\cdot3}{62\cdot5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log\frac{7\cdot2\times6\cdot3}{62\cdot5}$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{72\times63}{6250} = \frac{1}{3}\log\frac{2^3\times3^4\times7}{10\times5^4}$$

$$= \frac{1}{3}[3\log2+4\log3+\log7-\log10-4\log5]$$

$$= \frac{1}{3}\left[3\log2+4\log3+\log7-\log10-4\log\frac{10}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}[7\log2+4\log3+\log7-5\log10] = -1+\cdot9535977$$

$\therefore$ N = অ্যান্টিলগ $\overline{1}\cdot9535977 = \cdot898665$

উদা. 5. লগ-তালিকা ব্যবহার করে মান নির্ণয় করুন : $\sqrt[18]{1129}$

মনে করি, $x = \sqrt[18]{1129} = (1129)^{\frac{1}{18}}$

$$\therefore \log x = \frac{1}{18}\log1129. = \frac{1}{18}\times3\cdot0527 = 0.1696$$

$\therefore$ x = অ্যান্টিলগ ·1696 = 1·478.

উদা. 6. সমাধান করুন : $6^{3-4x}\ \ 4^{x+4} = 8$

দেওয়া আছে log2 এবং log3-এর মান।

উভয়দিকে লগ নিয়ে পাই, $(3-4x)$ log6 + $(x+5)$ log4 = log8

বা, 3log6 – 4$x$log6 + $x$log4 + 5log4 = log8

বা, $x(\log 4 - 4\log 6) = \log 8 - 3\log 6 - 5\log 4$

$$\therefore\ x = \frac{3\log 2 - 3(\log 2 + \log 3) - 10\log 2}{2\log 2 - 4(\log 2 + \log 3)} = 1{\cdot}77 \text{ আনুমানিক}$$

log 2 এবং log3-র মান বসিয়ে।

উদা. 7. সমাধান করুন : $2^x = 3^y$ ....(1), $2^{y+1} = 3^{x-1}$....(2)

(1) থেকে $x\log 2 = y\log 3 \quad \therefore y = x\dfrac{\log 2}{\log 3}$

(2) থেকে $(y + 1)\log 2 = (x-1)\log 3$

বা, $-x\log 3 + y\log 2 = -\log 3 - \log 2$

বা, $-x\log 3 + \dfrac{x(\log 2)^2}{\log 3} = -(\log 3 + \log 2)$

বা, $x = \dfrac{(\log 3 + \log 2)\log 3}{(\log 3)^2 - (\log 2)^2} = 2{\cdot}71$ [log2, log3-র মান বসিয়ে]

এবং $y = \dfrac{\log 2}{\log 3 - \log 2} = 1{\cdot}71$

৫(গ).৫ সূচক শ্রেণী ও লগারিদম্ শ্রেণী (Exponential and logarithmic series)

৫(গ).৫.১ সূচক শ্রেণী (Exponential Series) কী?

সূচক শ্রেণী : $1 + \dfrac{1}{\underline{|1}} + \dfrac{1}{\underline{|2}} + \dfrac{1}{\underline{|3}} + \ldots + \dfrac{1}{\underline{|r}} + \ldots - (1)$

এই অসীম শ্রেণীটির যোগফল আছে এবং এই যোগফলকে 'e' প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। এর মান 2 এবং 3-এর মধ্যবর্তী অর্থাৎ 2<e<3 এবং এটা মূলদ সংখ্যা নয়। 'e' শ্রেণীর ডানদিকের পদগুলির 6 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধমান $e = 2.718282$. e একটি অমেয় (incommensurable number) সংখ্যা।

প্রমাণ করা যায় যে, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য

$e^x = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + ... + \frac{x^r}{\underline{|r}} + ...\infty - (2)$ এটিকে সূচক উপপাদ্য বলে এবং এই শ্রেণীটিকে সূচক শ্রেণী বলা হয়।

যদি $\log_e^a = N$ হয়, (a, ধনাত্মক) তবে $a = e^N$

$$\therefore a^x = e^{Nx} = e^{x\log_e^a} = 1 + \frac{x\log_e^a}{\underline{|1}} + \frac{x^2(\log_e^a)^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3(\log_e^a)^3}{\underline{|3}} + ... + \frac{x^r(\log_e^a)^r}{\underline{|r}} ... - (3)$$

(2)-এ x-এর স্থানে $-x$ এবং -1 বসিয়ে পাই,

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{x^3}{\underline{|3}} + ... + (-1)^r . \frac{x^r}{\underline{|r}} + ... - (4)$$

এবং $e^{-1} = 1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + ... + (-1)^r . \frac{1}{\underline{|r}} + ... - (5)$

৫(গ).৫.২ লগারিদম্ শ্রেণী এবং লগারিদম্ উপপাদ্য (Logarithmic Series)

যদি $-1 < x \leq 1$ হয় তবে সূচক উপপাদ্য থেকে প্রমাণ করা যায় যে,

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{r-1}\frac{r^r}{r} + ...\infty$ এই অসীম শ্রেণীটি অভিসারী হবে। এটিকে লগারিদম্ শ্রেণী বলা হয়। এর যোগফলকে $\log_a(1+x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ

$$\log_a(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{r-1}\frac{r^r}{r} + ... - (6)$$

এটিকে লগারিদম্ উপপাদ্য বলে।

(6)-এ x-এর জায়গায় $-x$ বসিয়ে পাই—

$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^r}{r} - ...\infty - (7)$$

এখানে $-1 \leq x < 1$; হলে ডানপক্ষ অভিসারী হবে।

e নিধানের লগারিদম্‌কে নেপিরিয়ান (Nepierian System) পদ্ধতি বলে। নেপিয়ার (Napier, 1550-1617) লগারিদম্-এর আবিষ্কারক।

৫(গ).৫.৩ উদাহরণমালা

উদা. 1. প্রমাণ করুন যে $e^{-1}=\frac{2}{\lfloor 3}+\frac{4}{\lfloor 5}+\frac{6}{\lfloor 7}+\ldots\infty$

আমরা জানি, $e^{-1}=1-\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}+\ldots\infty$

$$=\left(\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}\right)+\ldots\infty$$

$$=\frac{2}{\lfloor 3}+\frac{4}{\lfloor 5}+\frac{6}{\lfloor 7}+\ldots\infty$$

উদা. 2. দেখান যে, $1+\frac{1+2}{\lfloor 2}+\frac{1+2+2^2}{\lfloor 3}+\frac{1+2+2^2+2^3}{\lfloor 4}+\ldots=e^2-e.$

এখানে n-তম পদ $=\frac{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}{\lfloor n}=\frac{2^n-1}{2-1}.\frac{1}{\lfloor n}=\frac{2^n-1}{\lfloor n}$

বামপক্ষ $=1+\frac{1+2}{\lfloor 2}+\frac{1+2+2^2}{\lfloor 3}+\frac{1+2+2^2+2^3}{\lfloor 4}+\ldots\infty$

$$=(2-1)+\frac{2^2-1}{\lfloor 2}+\frac{2^3-1}{\lfloor 3}+\frac{2^4-1}{\lfloor 4}+\ldots\infty$$

$$=\left(\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{2^2}{\lfloor 2}+\frac{2^3}{\lfloor 3}+\ldots\infty\right)-\left(\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\ldots\infty\right)$$

$$=(e^2-1)-(e-1)\quad=e^2-e.$$

উদা. 3. যোগফল নির্ণয় করুন : $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots\infty$

n-তম পদ $=\frac{1}{2n(2n-1)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}$

$\therefore$ প্রথম পদ (n = 1 নিয়ে) $t_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

দ্বিতীয় পদ $t_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

তৃতীয় পদ $t_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$

....

....

n-তম পদ $t_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$

যোগ করে পাই $t_1+t_2+t_3+...t_n, \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$

$\therefore\ 1-(t_1+t_2+...+t_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ... - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$

অসীম শ্রেণীর যোগফলের সংজ্ঞা অনুসারে,

$\lim_{n\to\infty}[1-(t_1+t_2+...+t_n)] = \log_a^2$ [(6)-এ $x = 1$ বসিয়ে]

$\therefore$ অসীম পর্যন্ত নির্ণেয় যোগফল $= 1 - \log_a^2$

উদা. 4. $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...\infty$ হলে দেখান যে, $x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ...\infty$

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... = \log_a(1+x), -1 < x \le 1$$

$$\therefore\ e^y = e^{\log(1+x)} = 1 + x$$

$$\therefore\ x = e^y - 1 = y + \frac{y^2}{\underline{|2}} + \frac{y^3}{\underline{|3}} + ...\infty$$

উদা. 5. দেখান যে, $\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ...\infty\right](-1 \le x < 1)$

আমরা জানি যদি $-1 < x \le 1$ হয় তবে,

$$\log_e(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 ...\infty$$

এবং $\log_e(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - ...\infty$ যদি $-1 \le x < 1$ হয়।

$$\therefore \log_e(1+x) - \log_e(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\infty\right)$$

বা, $\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \infty\right]$

৫(গ).৬ অনুশীলনী

1) প্রদত্ত $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$, $\log 7 = \cdot 8450980$. লগ-নির্ণয় করুন :

(i) $(0\cdot 405)^{\frac{1}{6}}$ [উঃ $\overline{1}\cdot 9345759 = -0\cdot 0654241$]

(ii) $(0\cdot 0025)^{\frac{11}{9}}$ [উঃ $\overline{4}\cdot 8197044 = -3\cdot 1802956$]

2) $,^{43}$-এর অঙ্ক-সংখ্যা নির্ণয় করুন। [উঃ 18]

3) মান নির্ণয় করুন : $\frac{\sqrt[3]{2\cdot 415}}{(0\cdot 824)^4}$ [উঃ $2\cdot 588$]

4) সমাধান করুন :

(i) $5^{1-x} = 6^{x-3}$ [উঃ $2\cdot 05$]

(ii) $a^x + 9a^{-x} = 3(b^x + b^{-x})$ [উঃ $\frac{\log 3}{\log a \pm \log b}$]

(iii) $2^{x+y} = 6^y$, $3^x = 3.2^{y+1}$ [উঃ $x = \cdot 60206$, $y = -1\cdot 39799$]

5) চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় করুন : $\frac{1}{5\sqrt{e}}$ [উঃ 8187 আনুমানিক]

6) $\log(1 + x + x^2)$-এর বিস্তৃতিতে x^a-এর সহগ নির্ণয় করুন যখন $|x| < 1$.

[উঃ n যদি 3-এর গুণিতক না হয় তবে x^n-এর সহগ $\frac{1}{n}$ আবার যদি n 3-এর গুণিতক হয় তবে x^n-এর সহগ $\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n}\right)$

7) দেখান যে $\frac{2}{\underline{|1}}+\frac{4}{\underline{|3}}+\frac{6}{\underline{|5}}+\ldots\infty=e.$

8) দেখান যে $\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\ldots\right)^2-\left(1+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\ldots\right)^2=1$

9) প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1+2}{\underline{|3}}+\frac{1+2+3}{\underline{|4}}+\ldots=\frac{e}{2}.$

অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করুন :

10) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots\infty$ [উঃ $\log_e^2$]

11) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\ldots\infty$ [উঃ 2–log4]

12) দেখান যে, $1+\frac{1+3}{2!}+\frac{1+3+3^2}{3!}+\frac{1+3+3^2+3^3}{4!}\ldots\infty=\frac{1}{2}e(e^2-1)$

13) প্রমাণ করুন : $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\ldots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\ldots$

14) যদি $y=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$ এবং $z=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\ldots$ হয়,

তবে দেখান যে $x=\log_e\frac{1}{1-e^x}$

একক ৬ ❑ বাস্তব চলের ধারণা, অপেক্ষক, অপেক্ষকের লিমিট এবং সন্ততি

গঠন

৬.১ উদ্দেশ্য

এই এককে বাস্তব সংখ্যার ধারণা, বাস্তব চলের অপেক্ষক, অপেক্ষকের লিমিট ও সন্ততি সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে। পরবর্তী এককে অন্তরকলনের সংজ্ঞা, নানা ধর্ম জানতে গেলে এই এককের প্রয়োজন।

অন্তরকলন বিদ্যায় অপেক্ষকের চল এবং অপেক্ষকের মধ্যেকার নির্ভরতা নিরূপণ, পরাধীন চল-এর স্বাধীন চল সাপেক্ষে পরিবর্তনের হার নির্ণয়, উত্তরোত্তর অন্তরকলন, অপেক্ষককে অসীম শ্রেণী রূপে প্রকাশ ইত্যাদি বিষয় আলোচিত হয়। বস্তুজগৎ যে সব সূত্র মেনে চলে তা প্রকাশ করতে অন্তরকলন ও সমাকলন বিদ্যা খুবই প্রয়োজনীয়।

৬.২ বাস্তব সংখ্যার ধারণা

অন্তরকলন বিদ্যার আলোচনার পূর্বে বাস্তব সংখ্যা তত্ত্বের আলোচনা আবশ্যিক। প্রাথমিক অবস্থায় গণনার প্রয়োজন 1, 2, 3 4... ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural numbers) বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার (Positive integers) উৎপত্তি। যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির ওপর প্রয়োগ করলে স্বাভাবিক সংখ্যাই পাওয়া যায়। সুতরাং যোগ এবং গুণ প্রক্রিয়া স্বাধীনভাবেই প্রয়োগ করা যায়। কিন্তু যোগের বিপরীত বিয়োগ সম্ভব হবে যদি ঋণাত্মক সংখ্যা (–1, –2, –3 ইত্যাদি) ও 0 (শূন্য) ব্যবহার করা হয়। আবার ভাগ প্রক্রিয়ার জন্য র‍্যাশনাল সংখ্যা অর্থাৎ দুটি পূর্ণ সংখ্যা p, q এর অনুপাত $^p/_q$ যেখানে $q \neq 0$; এরূপ সংখ্যা ব্যবহার না করে প্রয়োগ করা যায় না। কারণ $3 = 5 + K$ হলে $K = -2$ হলে এবং $5 = 7K$ হলে $k = {}^5/_7$ ($^p/_q$ আকারের) হবে। অর্থাৎ এই দুটি প্রক্রিয়া ঋণাত্মক সংখ্যা, শূন্য এবং ভগ্নাংশের ধারণার প্রয়োজন ঘটায়। ভগ্নাংশ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে। –1, –2, –3, –4... ইত্যাদি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। সামগ্রিকভাবে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা, শূন্য এবং ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ভগ্নাংশ নিয়ে মূলদ বা র‍্যাশনাল (rational) সংখ্যাসমূহ গঠিত হয়। মনে রাখতে হবে $\frac{0}{0}, \frac{5}{0}, \frac{k}{0}$ ইত্যাদি অর্থহীন। কারণ মনে করি $\frac{k}{0} = m$ অর্থাৎ $k = 0 \times m$ কিন্তু এটা সত্য নয় কারণ কোন সংখ্যাকে 0 দ্বারা গুণ করলে শূন্যই হয়।

মূলদ সংখ্যা (rational number) : মনে করি $r = \frac{p}{q}$ যেখানে p,q উভয়েই পূর্ণ সংখ্যা এবং $q \neq 0$ আমরা q ধনাত্মক ধরলাম। p ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অথবা শূন্য হতে পারে। এখানে r-কে একটি র‍্যাশনাল বা মূলদ সংখ্যা বলা হয়। $^p/_q$ একটি মূলদ সংখ্যা হলে আমরা মনে করতে পারি p এবং q এর মধ্যে

1 ব্যতীত কোনও সাধারণ উৎপাদক নেই। দশমিকের পর সসীম পদযুক্ত সংখ্যা এবং পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যাসমূহ মূলদ সংখ্যা, যেহেতু তাদের $^p/_q$ এইরূপে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ— $\frac{3}{2}, \frac{4}{7}, 5\left(=\frac{5}{1}\right), -3\left(=\frac{-3}{1}\right), 0\left(=\frac{0}{1}\right)\ldots$ মূলদ সংখ্যার উদাহরণ।

মূলদ সংখ্যার ধর্ম : (i) যে কোনও দুইটি মূলদ সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল (যেখানে সম্ভব) একটি মূলদ সংখ্যা হয়।

(ii) x এবং y দুটি অসমান মূলদ সংখ্যা হলে $x > y$ অথবা $x < y$ হবে।

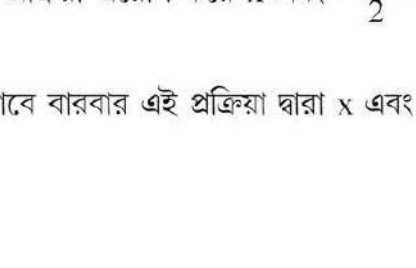
(iii) x, y, z তিনটি মূলদ সংখ্যা হলে এবং $x > y$, $y > z$ হলে $x > z$ হবে। অর্থাৎ মূলদ সংখ্যাসমূহ ক্রমবিন্যস্ত (ordered)।

(iv) মনে করি x, y দুইটি মূলদ সংখ্যা এবং $x > y$. x এবং y এর মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। $\frac{x+y}{z}$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং $x > \frac{x+y}{2} > y$ এই প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে x এবং $\frac{x+y}{2}$ ও $\frac{x+y}{2}$ এবং y এর মধ্যে মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে বারবার এই প্রক্রিয়া দ্বারা x এবং y এর মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

সুতরাং মূলদ সংখ্যাসমূহ নিবিড় (Dense).

মূলদ বিন্দু : মূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ :

XOX' সরলরেখার উপর O যে কোনও একটি বিন্দু নেওয়া হল যা XOX' কে দুটি ভাগে ভাগ করেছে। OXকে ধনাত্মক অংশ এবং OX'-কে ঋণাত্মক অংশ বলা হয়। X-এর উপর A একটি বিন্দু নেওয়া হল এবং OA দৈর্ঘ্যকে একক দৈর্ঘ্য বলা হল। এক্ষণে 0 এবং 1 সংখ্যাদ্বয় O এবং A দ্বারা সূচিত হবে। XOX' কে সংখ্যা রেখা (number line) বলা হয়। সংখ্যারেখার ধনাত্মক দিকে অর্থাৎ OX-এর উপর যে কোনও একটি বিন্দু P নিলাম যেখানে OP = K.OA, অথবা, OX'-এর উপর P' বিন্দু নেওয়া হল যেখানে $OP' = -$ K.OA, তা হলে P অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা K এবং P' অখণ্ড ঋণাত্মক সংখ্যা –Kকে সূচিত করবে। সংখ্যা রেখার (বা সংখ্যা অক্ষের) ওপর যে কোনও মূলদ সংখ্যা $^p/_q$ (p



চিত্র—1

ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) সূচিত করতে হলে সংখ্যারেখার উপর Q বিন্দু নেওয়া হল যা পূর্ণ সংখ্যা p-কে সূচিত করবে। p ধনাত্মক হলে Q, OX এর ওপর এবং p ঋণাত্মক হলে Q, OX´এর ওপর অবস্থিত হবে। এক্ষণে OQ-কে q সংখ্যক সমান ভাগে ভাগ করা হল এবং OQ-এর ওপর R একটি বিন্দু নেওয়া হল যাতে OQ = q OR হয়। এখানে R বিন্দুটি মূলদ সংখ্যা $^p/_q$ কে সূচিত করবে। এরূপে যে কোনও মূলদ সংখ্যাই XOX´-এর ওপর একটি বিন্দু দ্বারা সূচিত হবে।

আবার সংখ্যারেখার উপর অসংখ্য বিন্দু আছে যারা মূলদ সংখ্যাকে সূচিত করে না। এটি দেখাবার জন্য OAB একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ নেওয়া হল যেখানে OA = AB = 1; $\angle A$ = সমকোণ। সুতরাং $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2$ অথবা, $x^2 = 2$; যেখানে OB = x, OL = $\sqrt{2}$ এখানে L বিন্দু x সংখ্যাকে নির্দেশ করে। কিন্তু এমন কোনও মূলদ সংখ্যা নেই যাহার বর্গ 2। কারণ সম্ভব হলে ধরা যাক L বিন্দু একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{p}{q}(=x)$ সূচিত করে যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা দুটির মধ্যে 1 ব্যতীত কোনও সাধারণ উৎপাদক নেই। সুতরাং $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ অর্থাৎ $p^2 = 2q^2$. অতএব p^2 একটি যুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং p একটি যুগ্ম সংখ্যা। ধরা যাক p = 2m (m একটি পূর্ণ সংখ্যা)।

অতএব p এবং q এর একটি সাধারণ উৎপাদক থাকবে। কিন্তু সম্ভব নহে। অতএব L বিন্দুটি সংখ্যা রেখার ওপর কোনও মূলদ সংখ্যা সূচিত করবে না। L বিন্দুর মতো অসংখ্য বিন্দু সংখ্যারেখার ওপর নির্ণয় করা যায় যারা মূলদ সংখ্যা সূচিত করে না। এইরূপ সংখ্যা সমূহকে অমূলদ সংখ্যা (irrational number) বলা হয়। **উদাহরণ :** $\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$ ইত্যাদি। আরও অনেক প্রকারের সংখ্যা আছে যারা মূলদ নয়। সমগ্র মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যাকে একসঙ্গে বলা হয় বাস্তব সংখ্যা (real number)। সংখ্যা রেখার উপর যে কোনও বিন্দু একটি বাস্তব সংখ্যাকে সূচিত করবে এবং বিপরীতভাবে প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যার জন্য সংখ্যারেখার ওপর একটি বিন্দু থাকবে। এটা বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে আমাদের একটি প্রকল্প বা hypothesis।

৬.২.১ কতিপয় সংজ্ঞা

ধ্রুবক (Constant) : কোনও গাণিতিক আলোচনায় কোনও গাণিতিক প্রতীকের মান সর্বদা অপরিবর্তিত থাকলে উহাকে **ধ্রুবক** (constant) বলে। ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি একটি ধ্রুবক। অর্থাৎ ধ্রুবকের একটি নির্দিষ্ট মান থাকে।

চলরাশি (Variable) : গাণিতিক পর্যালোচনায় কোনও প্রতীকের মান পরিবর্তনশীল হলে তাকে **চলরাশি** (variable) বলে। যদি কোনও চলরাশি x শুধু বাস্তব সংখ্যাই প্রাপ্ত হয় তবে x-কে বাস্তব চলরাশি (real variable) বলে। x দ্বারা তাপমাত্রা বা গাড়ির গতি নির্দেশ করলে x একটি চলরাশি।

ব্যাপ্তি অঞ্চল (Domain) : কোনও গাণিতিক প্রক্রিয়ায় চলরাশি x-এর সম্ভাব্য সমস্ত মানের সংগ্রহকে x-এর **ব্যাপ্তি (domain)** বলে। উদাহরণস্বরূপ যদি x প্রকৃত ধনাত্মক ভগ্নাংশ (proper fraction) হয় তবে $0 < x < 1$ এই প্রতীক ব্যবহার করা হয়। একে **মুক্ত পরিসর** (open interval) বলে। অর্থাৎ x, 0 এবং 1 এর মধ্যে যে কোনও মান গ্রহণ করতে পারে। যদি উপরন্তু x, 0 এবং 1 মানও গ্রহণ করতে পারে। তবে লেখা হয় $0 \le x \le 1.$ একে **বদ্ধ পরিসর** (closed interval) বলে। মুক্ত পরিসর (0,1) চিহ্ন দ্বারা এবং বদ্ধ পরিসর [0,1] চিহ্নের দ্বারাও নির্দেশ করা হয়। অনুরূপে $0 \le x < 1$ এবং $0 < x \le 1$ পরিসর দুটি যথাক্রমে [(0,1) এবং (0,1)] চিহ্নদ্বয় দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

বাস্তব সংখ্যার পরম মান : যদি x একটি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে x-এর পরম মান |x| দ্বারা নির্দেশিত হয়। পরম মানের সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$|x| = x$, যদি $x \ge 0$

$= -x$ যদি $x < 0$

অর্থাৎ, কোনও সংখ্যার পরমমান তার সংখ্যাগত ধনাত্মক মানটিকে বোঝায়।

সংজ্ঞা অনুসারে $|3| = |-3| = 3$ যদি $x \ge 0$ হয় তবে $|x| = |-x| = x.$

$|x| = 5$ হলে $x = +5$ অথবা -5 হবে।

যদি x এবং y দুইটি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে দেখানো যায় যে,

(i) $|x| \le a$ অর্থাৎ $-a \le x \le +a$

(যেখানে a একটি ধনাত্মক সংখ্যা)

(ii) $|x| \ge a$ অর্থাৎ $x \ge a$ এবং $x \le -a$

$(a > 0)$

(iii) $|x \pm y| \le |x| + |y|$

(iv) $|x \pm y| \ge |x| - |y|$

(v) $|xy| = |x||y|$

(vi) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

৬.২.২ প্রশ্নমালা

1) নিম্নের বক্তব্যগুলি সঠিক কিনা বলুন :

(i) $-4 \leq x \leq 10$ অর্থাৎ $|x-3| \leq 7$

(ii) $-7 \leq x \leq -3$ অর্থাৎ $|x+5| \leq 2$

(iii) $0 < |x-a| < \delta$ অর্থাৎ $a-\delta < x < a+\delta, x \neq a$

2) **সমাধান করুন :**

(i) $|2x - 3| < 1$ [উঃ (1,2)]

(ii) $|x| = x + 5$, $|x| = x - 5$ [উঃ $\frac{5}{2}$, সমাধান নেই।]

(iii) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ [উঃ ± 3]

৬.৩ অপেক্ষকের ধারণা (Idea of function of a single variable)

আমরা গাণিতিক আলোচনায় 'সেট' (set) কথাটি ব্যবহার করে থাকি। সাধারণভাবে বলতে গেলে একটি সেট হচ্ছে কতগুলি বস্তুর সংগ্রহ (collection)। স্বাভাবিকভাবে, কলণ গণিতে আমরা সাধারণত বাস্তবসংখ্যার সেট নিয়ে কথা বলব। যেমন (1, 2, 3,....) এই স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ একটি সেট যার পদসমূহ হল 1, 2, 3,..... ইত্যাদি।

আবার $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$ আর একটি সেট।

সমগ্র বাস্তব সংখ্যার সেটকে অনেক সময় R দিয়ে বোঝানো হয়। এখন A একটি সেট যার পদগুলির বাস্তব সংখ্যা নেওয়া হল, যেমন, $A = \{x; 0 \leq x \leq 1\}$ অর্থাৎ 0 ও 1 এর অন্তর্বর্তী সমস্ত বাস্তব সংখ্যা A-এর পদ। আমরা অনেক সময় গাণিতিক প্রতীক (Mathematical symbol) ব্যবহার করে থাকি। যেমন x একটি প্রতীক যার মান আমরা মনে করতে পারি উপরের A সেটের যে কোনও পদের সমান হতে পারে। এইরূপভাবে কোনও একটি সেটের পদগুলির যে কোনোটির সমান হতে পারে এমন একটি গাণিতিক প্রতীককে আমরা চল (variable) বলে থাকি। যেমন এখানে x একটি চল যা 0 ও 1-এর মধ্যবর্তী যে কোনও মানের সমান হতে পারে।

আরও উদাহরণ : $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$ একটি সেট এবং আমরা প্রতীক y দিয়ে চিহ্নিত করলে yএর মান 1^2, 2^2, 3^2 বা 4^2 যে কোনওটি হতে পারে।

যদি কখনও একটি প্রতীক Z এমন হয় যে তার সেটে কেবল মাত্র একটি সংখ্যা আছে, সেক্ষেত্রে সেই প্রতীক Z-কে আমরা ধ্রুবক (constant) বলব।

যেমন একটি বৃত্তের পরিধি ও তাহার ব্যাসের অনুপাতকে আমরা প্রতীক π দিয়ে বোঝায়। π-এর মান প্রকৃতপক্ষে সকল বৃত্তের জন্য একই হয়। π-কে ধ্রুবক বলা যেতে পারে।

চলরাশির উদাহরণ হিসাবে আমরা একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে y চলরাশি এবং বর্গক্ষেত্রের বাহুকে x চলরাশি লিখলে আমরা জানি যে চলরাশি দুটি পরস্পর $y = x^2$ এই সূত্র দ্বারা যুক্ত। এখানে y-এর মান x চলরাশির মানের উপর নির্ভর করছে। আবার একটি গাড়ি একটি সরলপথে চলতে থাকলে, গাড়িটি 1 সেকেণ্ডে যদি 10 মিটার যায়, 2 সেকেণ্ডে 25 মিটার যায়, 3 সেকেণ্ড সময়ে 40 মিটার যায়, তাহলে আমরা সময়কে t প্রতীক ও দূরত্ব পরিমাণকে s প্রতীক দিয়ে চিহ্নিত করলে s চলকে t চলের উপর নির্ভর করছে বলা যায়। আমরা এটি বোঝাবার জন্য স্বাধীন (independent) ও অধীন (dependent) এই দুই প্রকার চলের কথা ভাবতে পারি। স্বাধীন চল যেমন সময় t-এর মান 0 থেকে 3 সেকেণ্ড-এর মধ্যে যে কোন মান নিতে পারে। t-এর মান দেওয়া থাকলে সেই সময় গাড়ি যতটা যায় তার মান s পাওয়া যায়। অতএব s চল t চলের মানের উপর নির্ভর করছে। আমরা t-কে স্বাধীন চল ও s-কে অধীন চল বলব।

'$x \to a$', a যদি একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে $x \to a$ এ দ্বারা আমরা বুঝাই যে, x সে সমস্ত মান গ্রহণ করছে যে, কোনও ছোটো সংখ্যার দেওয়া থাকলে $|x-a|$ তার থেকে কম মানসমূহ গ্রহণ করে। x-এর মান a-এর সঙ্গে সমান কখনই হবে না।

এখন অপেক্ষকের ধারণা দেওয়া যায়।

দুটি চল x ও y আছে। মনে করি x চল E সেট থেকে এবং y চল G সেট থেকে মানগুলি গ্রহণ করে।

একটি অপেক্ষক f হল একটি নিয়ম যার দ্বারা x এর E সেটের প্রতি মানের জন্য y চলের একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়। এখানে x স্বাধীন চল এবং y অধীন চল। E সেটটিকে অপেক্ষকের ক্ষেত্র (domain) বলে এবং y যে সব মান অধিগ্রহণ করে সেই সেটটিকে (C) অপেক্ষকের পাল্লা (Range) বা বিস্বাঞ্চল (C is a subset of G) বলা হয়। অপেক্ষক আবার এভাবেও প্রকাশ করা যায়—

যদি দুটি চলরাশি x এবং y এরূপে সম্পর্কযুক্ত থাকে যে x-এর একটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের প্রতিটি মানের জন্য y-এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় তাহলে y-কে ঐ ক্ষেত্রে x-এর একটি অপেক্ষক বলা হয় এবং $y = f(x)$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে **f** দ্বারা নিয়মকে চিহ্নিত করে যা দ্বারা x-এর E সেটের প্রতি মানের জন্য একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা y পাওয়া যায়।

৬.৩.১ অপেক্ষক নির্দেশ করার পদ্ধতি

সাধারণত তিনটি উপায়ে যে কোনও একটি অপেক্ষক নির্দেশিত করা যায়। সেগুলি হল—

(ক) ফর্মুলা আকারে প্রকাশ;

(খ) সারণি আকারে প্রকাশ;

(গ) লেখচিত্র আকারে প্রকাশ।

(ক) একটি ক্ষেত্রের উপর সংজ্ঞায়িত অপেক্ষককে এক বা একাধিক ফর্মুলার দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ— (i) $y = 3x^2 = f(x)$,

$$\text{(ii) } y = \begin{cases} x \text{ if } x \le 0 \\ x^2 \text{ if } x > 0 \end{cases}$$

(i) $f(x) = 3x^2$ অপেক্ষকে x-এর মান যে কোনও বাস্তব সংখ্যা হলে f(x)-এর মান একটি বাস্তব সংখ্যা হবে। আবার x-এর বদলে –x বসালে, $f(x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f-(x)$. অতএব f-এর পাল্লা (0,K), যেখানে K যে কোনও একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা নেওয়া যায়।

(ii) এখানে f(x) দুটি সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। f-এর পরিসর সমগ্র বাস্তব সংখ্যা এবং পাল্লাও সমগ্র বাস্তব সংখ্যা।

উদাহরণ : নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

$$\text{(a) } f(x) = \sqrt{4-x^2}, \text{ (b) } f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} \text{ (c) } f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$$

সমাধান : (a) x-এর যে মানের জন্য $(4 - x^2) \geq 0$ যে সব মান f-এর ক্ষেত্র।

$4 \geq x^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2.$ সুতরাং f(x)-এর ক্ষেত্র হবে $-2 \leq x \leq 2$

বা, [–2, 2] আর $y = f(x)$-এর পাল্লা হবে $0 \leq y \leq 2$

(b) x-এর যে মানের জন্য $x^2 - 3x + 2 = 0$ তার জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয়।

এবং $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ এবং $x = 2$. $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$ সমস্ত বাস্তব রাশি f(x)-এর ক্ষেত্র। অর্থাৎ $x < 1$ বা $1 < x < 2$ বা $x > 2$, এই তিনটি অসমীকরণ প্রত্যেকটি অপেক্ষকের ক্ষেত্র।

(c) $x = 4$ হলে f(x) সংজ্ঞায়িত নয়। সুতরাং 4 ছাড়া সমস্ত বাস্তব সংখ্যা x-এর $f(x) = x + 4$ অতএব $x > 4$ এবং $x > 4$ এই দুটি অঞ্চল f(x)-এর ক্ষেত্র।

(খ) যদি স্বাধীন চল x একটি সীমিত সেট থেকে মান গ্রহণ করে সেক্ষেত্রে x-এর মানগুলি $x_1, x_2, ... x_n$ ক্রম আকারে প্রকাশ করা যায়, এখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। x-এর এই মানগুলির জন্য $y = f(x)$ এর মান ধরা হল যথাক্রমে এবং $y_1, y_2, ... y_n$. x এবং $f(x) = y$ এর মান নিচের সারণিতে দেখানো হয়েছে।

x	x_1	x_2	..................x_n
y(x)	y_1	y_2	..................y_n

লগারিদিমিক অপেক্ষক বা ত্রিকোণমিতির অপেক্ষককে সারণি আকারে প্রকাশ করা যায়।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে xy-সমতলে, x-এর মান যদি বাস্তব রাশির সেট থেকে গ্রহণ করে, তাহলে P(x,y) বিন্দু চিহ্নিত করা যায়—যার ভুজ x এবং কোটি [y বা f(x)], এভাবে সব বিন্দুগুলি একটি চিত্র গঠন করে। এই চিত্রকে অপেক্ষকের **লৈখিক রূপায়ণ বা চিত্র** (Graph) বলে।

এক কথায়, $y = f(x)$ যার ক্ষেত্র E সেট, তার লৈখিক রূপায়ণ হবে

$M = \{(x, f(x)\}; x \in E\}$

অপেক্ষকের লৈখিক রূপায়ণ বৈজ্ঞানিক পরীক্ষায় বা আধুনিক উৎপাদনে বিশেষভাবে প্রয়োগ করা হয়।

৬.৩.২ কয়েকটি বিশেষ অপেক্ষক এবং তাদের লেখচিত্র

(ক) যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষক : (Even and Odd functions)

ধরা যাক $y = f(x)$ অপেক্ষকটি একটি নির্দিষ্ট অন্তরালে সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরালটি O (মূলবিন্দু) সাপেক্ষে x-অক্ষে প্রতিসম। এই অপেক্ষক $y = f(x)$ **যুগ্ম** বলা হয় যদি যে কোনও x-এর জন্য

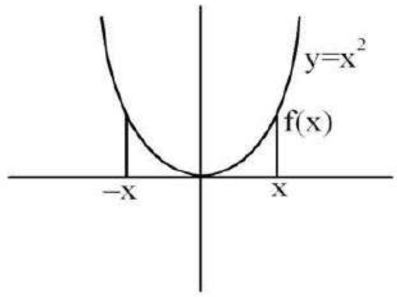
$f(x) = f(-x)$

এবং **অযুগ্ম** বলা হয় যদি যে কোনও x-এর জন্য

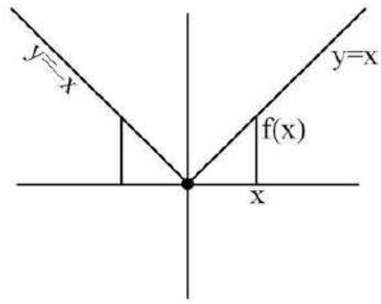
$f(x) = -f(-x)$

উদাহরণ : (i) $y = x^2$ অপেক্ষকটি যুগ্ম। এখানে $f(x) = x^2$ এবং $f(-x) = x^2$ $\therefore$ $f(x) = f(-x)$

(ii) $y = |x|$ অপেক্ষকটি যুগ্ম যেহেতু $f(x) = |x| = |-x| = f(-x)$



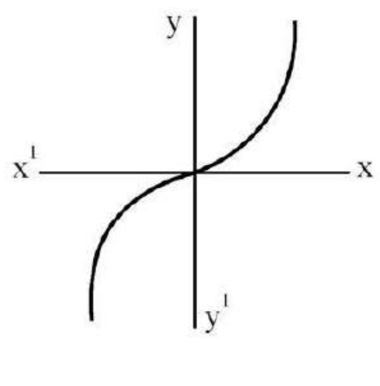
(i) এর লেখচিত্র



(ii)-এর লেখচিত্র

(iii) $y = f(x) = x^3$ অপেক্ষকটি অযুগ্ম যেহেতু $f(x) = x^3 = -(-x)^3 = -f(-x)$

x^3-এর লেখচিত্র :



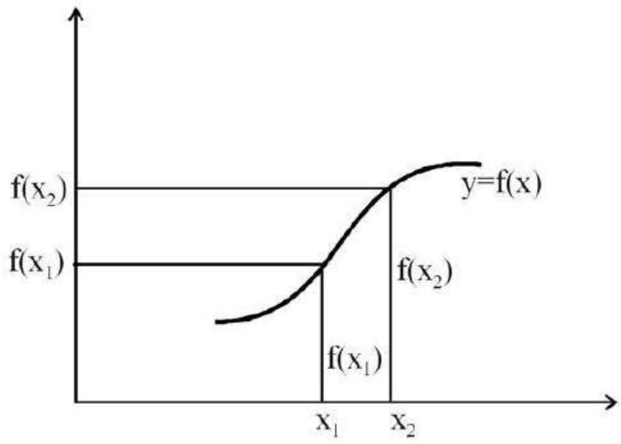
উদাহরণ : (iv) $f(x) = x^3 + x^2$ অপেক্ষকটি যুগ্ম বা অযুগ্ম নয়।

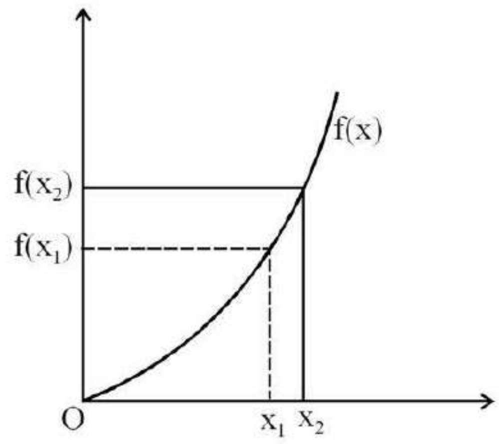
$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = x^3 + x^2 \neq f(x)$$

(খ) সমক্রমী অপেক্ষক (Monotonic functions)

ধরুন অপেক্ষক $y = f(x)$ যা একটি অন্তরালে [a, b]-তে সংজ্ঞায়িত।, $f(x)$-কে [a, b] অন্তরালে ক্রমবর্ধমান (Increasing) সমক্রমী বলা হয় যদি

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);\ x_1 x_2 \in [a, b]$

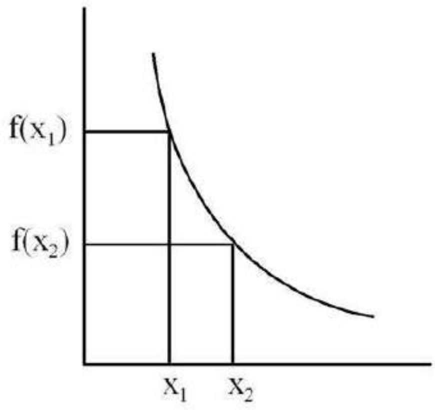




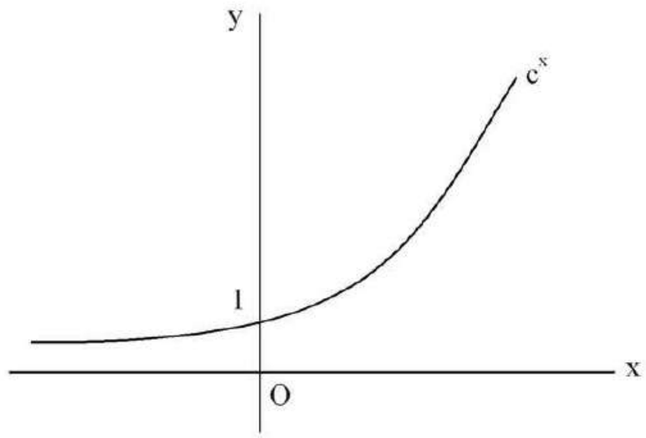
উপরোক্ত চিত্রগুলি দুটি ক্রমবর্ধমান অপেক্ষকের।

যদি $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),\ x_1 x_2 \in [a, b]$; তাহলে $f(x)$-কে $[a, b]$ অন্তরালে ক্রমক্ষীয়মান (decreasing) অপেক্ষক বলা হয়।

যদি কোনও অপেক্ষক $[a, b]$ অন্তরালে ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান হয় তাহলে $f(x)$-কে সমক্রমী (Monotonic) বলে।



(ক্রম ক্ষীয়মান অপেক্ষক)



(এক্স পোনেনশিয়াল অপেক্ষক)

(গ) এক্সপোনেনশিয়াল অপেক্ষক (Exponential function)

এই অপেক্ষকটি আমরা $y = e^x$ এই রূপে লিখি, যেখানে e হল একটি ধ্রুবক যার আসন্ন মান 2.718 (দশমিকের তিন ঘর পর্যন্ত) e^x-এর একটি ধর্ম হল $e^{x_1}.e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

আর e^x, সব বাস্তব x-এর জন্য সংজ্ঞায়িত, এবং $e^x > 0$

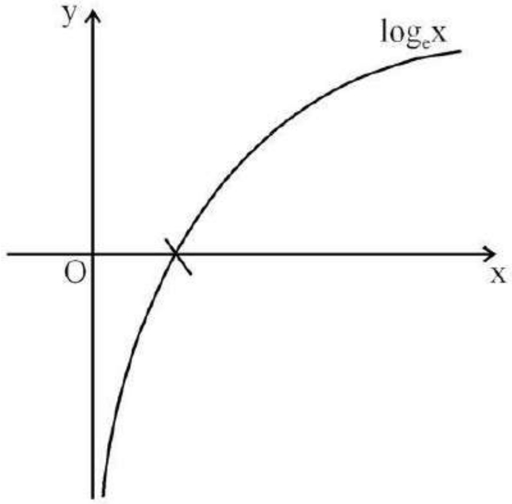
লগারিদম্ অপেক্ষক (Logarithmic Function)

$y = \log_e x$ এই অপেক্ষকটি এক্সপোনেন্শিয়ালের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। $y = \log_e x$ হলে $e^y = x$ হয়। অতএব বোঝা যাচ্ছে $\log_e x$ শুধুমাত্র $x > 0$ জন্য সংজ্ঞাত।

আবার $\log_e x_1 + \log_e x_2 = \log_e x_1 x_2$

$\log_e x_1 - \log_e x_2 = \log_e \frac{x_1}{x_2}$ যেখানে $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

পার্শ্বে $y = \log_e x$-এর লেখচিত্র দেওয়া হল।



এখানে e হল লগারিদমের নিধান (বা base).

অন্য নিধান (বা base) নিয়েও লগারিদম্ সংজ্ঞাত হয়। বিশেষ করে বহু ব্যবহৃত হল $\log_{10} x$, যদি $\log_e x = y$ হয় তবে $10^y = x$.

ফলে $\log_{10} x_1 + \log_{10} x_2 = \log_{10} x_1 x_2$ এবং $\log_{10} x_1 - \log_{10} x_2 = \log_{10} \frac{x_1}{x_2}$ ইত্যাদি।

বিপরীত অপেক্ষক : মনে করি $y = f(x)$ অপেক্ষকটি x-এর পরিসর A-তে সংজ্ঞাত এবং y-এর পরিসরটি হইতেছে B. যদি $x = \phi(y)$ অপেক্ষকটি B পরিসরে এরূপে সংজ্ঞাত হয় যে y-এর একটি মানের জন্য Aতে x-এর একটি মাত্র মান পাওয়া যায় তবে $f(x)$ এবং $\phi(y)$ অপেক্ষক দুটিকে একে অন্যের বিপরীত অপেক্ষক বলা হয়। যথা, $y = f(x) = 5x + 2$, হলে $x = \frac{1}{5}(y - 2) = \phi(y)$ এখানে $f(x)$ এবং $\phi(y)$ একে অন্যের বিপরীত অপেক্ষক।

পর্যাবৃত্ত (Periodic) অপেক্ষক : $f(x)$ যে পরিসরে সংজ্ঞাত সেই পরিসরের x-এর সকল মানের জন্য যদি $f(x) = f(x+k)$ হয় তবে $f(x)$-কে পর্যাবৃত্ত (periodic) অপেক্ষক বলা হয় যার পর্যায় (period) হচ্ছে k.

যথা : মনে করি $f(x) = \text{Sin}x$ এখানে $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \text{Sin}x$ এখানে period হচ্ছে 2π.

উদা. 1. যদি $f(x)\frac{5x^2+1}{2-x}$ হয় তবে f(3x) এবং f(x^3) নির্ণয় করুন।

$$f(3x)=\frac{5(3x)^2+1}{2.(3x)}=\frac{45x^2+1}{2.3x}$$

$$f(x^3)=\frac{5(x^3)^2+1}{2-(x^3)}=\frac{5x^6+1}{2-x^3}$$

উদাহরণ 2 : যদি $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ হয় f(x) নির্ণয় করুন। এখানে x + 1 = y বসালে $f(y) = (y - 1)^2 - 3(y - 1) + 2$ হয়।

অতএব, y-এর স্থানে x লিখলে $f(x) = (x - 1)^2 - 3(x - 1) + 2$

$$= x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + 2 = x^2 - 5x + 6$$

উদাহরণ 3 : যদি $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$ হয় তবে x-এর পরিসর নির্ণয় করুন।

এখানে $x-1\geq 0$ এবং $6-x\geq 0$ হতে হবে।

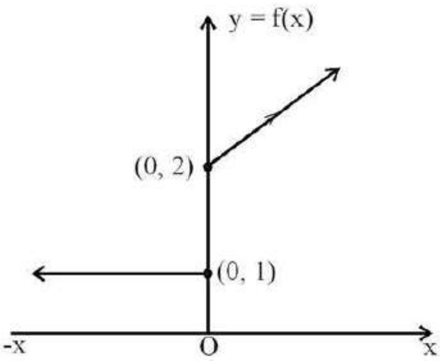
অর্থাৎ $x\geq 1$ এবং $x\leq 6$ অতএব পরিসর হচ্ছে [1, 6]

উদা. 4. $f(x) = 1, x < 0$

$= 0, x = 0$

$= x + 2, x > 0$

অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন :



উদা. 5. দেখান যে $y = f(x) = x^2 - |x|$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

$f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$

সুতরাং f(x) একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

৬.৩.৩ প্রশ্নমালা

1. যদি $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ হয় তবে f(2) এবং f(x^2) নির্ণয় করুন। $\left[-\frac{1}{3},\frac{1.x^2}{1+x^2}\right]$

2. যদি $y = f(x) = \frac{1x+m}{nx-1}$ তবে দেখান যে x = f(y).

3. $f(x) = m\frac{x-1}{m-1} + 1.\frac{x-m}{l-m}$ হলে দেখান যে f(l + m) = f(l) + f(m)

4. f(x) = $ax^2 + bx + c$, f(1) = 3, f(2) = 7, f(3) = 13 হলে a, b, c নির্ণয় করুন।

[a = b = c = 1]

5. যদি $f(x) = \frac{x}{1-x}$ হয়, তবে দেখান যে, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{(1-x)(1-x-h)}[h \neq 0]$

6. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির পরিসর নির্ণয় করুন।

(i) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ (ii) $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)}$ (iii) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

(iv) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ [(i) x = 2 বাদে সব বাস্তব সংখ্যা, (ii) 2 < x < 3

(iii) x = 3 বাদে সব বাস্তব সংখ্যা (iv) –2 < x < 1.

7. দেখান যে (i) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

(ii) f(x) = $2x^2 - x + 1$ অপেক্ষকটি যুগ্মও নহে অযুগ্মও নহে।

8. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

(i) f(x) = |x| (ii) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ (iii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (iv) f(x) = 2, $x \geq 0$

(v) f(x) = x, $0 \leq x \leq \frac{1}{2} < x \leq 1 = 0, x < 0$

৬.৪ অপেক্ষকের লিমিট বা সীমা (limit)

মনে করুন একটি বাস্তব চলরাশি x-এর 2.01, 2.001, 2.0001... ইত্যাদি মানগুলি পরপর নেওয়া হল যা সবসময় 2 থেকে বড় থাকছে কিন্তু x এবং 2 এর মধ্যে তফাৎ ক্রমশ কমছে। অর্থাৎ x ক্রমাগত 2-এর নিকটবর্তী হচ্ছে। কিন্তু $x \neq 2$ থাকছে। এরূপ ক্ষেত্রে $x \to 2+$ এই চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। অর্থাৎ

সংখ্যা অক্ষের উপর x এর ডানদিক থেকে 2 এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে। x এবং 2 এর মধ্যে দূরত্ব যতটা ইচ্ছা কমানো যেতে পারে। আবার মনে করি x, 1.99, 1.999, 1.9999.... ইত্যাদি মানগুলি নিচ্ছে এবং সংখ্যা অক্ষের উপর x-এর বাম দিক থেকে 2 এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে এবং সর্বদা 2 অপেক্ষা ছোট থাকছে। এক্ষেত্রে x এবং 2-এর মধ্যে দূরত্ব যত ইচ্ছা কমানো যেতে পারে কিন্তু $x \neq 2$ থাকবে।

এইক্ষেত্রে $x \to 2$ চিহ্নটি লেখা হয়।

$x \to 2$ চিহ্নটির অর্থ x ডানদিক অথবা বামদিক থেকে 2-এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে। অর্থাৎ x-এর লিমিট 2.

৬.৪.১ উদাহরণমালা

উদাহরণ : মনে কর f(x) = 2x + 3. x যখন ডানদিক থেকে 2-এর দিকে অগ্রসর হয় তখন f(x) এর মান যথাক্রমে হচ্ছে 7.02, 7.002, 7.0002.... ইত্যাদি। অর্থাৎ f(x) ক্রমশ 7 এর ডান দিক থেকে 7 থেকে সর্বদা বড় থেকে 7 এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে। আবার যখন x 2 এর বামদিক থেকে 2-এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে তখনf(x)-এর মান যথাক্রমে হচ্ছে 6.98, 6.998, 6.9998..... ইত্যাদি। অর্থাৎ f(x) সর্বদা 7 অপেক্ষা ছোট থেকে 7-এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে।

প্রথম ক্ষেত্রে লেখা হয়—

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (2x+3) = 7$$

অর্থাৎ f(x)-এর ডানসীমা হচ্ছে 7. আবার দ্বিতীয় ক্ষেত্রে লেখা হয় $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$

অর্থাৎ f(x)-এর বামসীমা 7. এক্ষেত্রে দক্ষিণ সীমা ও বামসীমা সমান এবং আমরা বলি $\lim_{x\to 2} f(x)$ বিদ্যমান এবং = 7.

মনে করি 'a' একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা এবং $x \to a (x \neq a)$. এরূপ ক্ষেত্রে কোনও অপেক্ষক f(x) যদি এরূপ হয় যে $f(x) \to 1$ (1 একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা) তবে লেখা হয় $\lim_{x\to a} f(x) = 1$। অর্থাৎ x এবং a-এর মধ্যে দূরত্ব |x–a| যথেচ্ছ ক্ষুদ্র করলে f(x) এবং 1-এর মধ্যে দূরত্ব |f(x)–1| ইচ্ছামত ক্ষুদ্র করা যায়।

গণিতের ভাষায়, $\in > 0$ যদি একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক রাশি হয় এবং $\in$-এর উপর নির্ভরশীল একটি ধনাত্মক রাশি δ এরূপ যদি পাওয়া যায় যে, $0 < |x-a| \leq \delta$ হলে $|f(x) 1| < \in$ হয় তবে বলা হয়, x a-এর নিকটবর্তী হলে f(x) এর সীমা।

অর্থাৎ $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ এই সংজ্ঞা থেকে বুঝা যায় সীমা থাকলে দক্ষিণসীমা এবং বামসীমা সমান হবে।

উদাহরণ 1. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ অপেক্ষকটির সীমা নির্ণয় করুন যখন $x \to 3$ অর্থাৎ $x = 3$ বিন্দুতে f(x) সংজ্ঞাত।

$x = 3$ বসালে $f(3) = \frac{0}{0}$ অর্থাৎ অর্থহীন। মনে করি $x = 3 + h$, $h \neq 0$

$$f(3+h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{3+h-3} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = (6+h)$$

এক্ষণে $x \to 3$ হলে $h \to 0$ হবে। অর্থাৎ $\lim_{h \to 0} f(3+h)$-এর সীমা 6

অনুরূপে $x = 3 - h$ নিয়ে f(x) এর সীমা পাই 6.

$$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

উদা. 2 : সীমা নির্ণয় করুন : $\lim_{x \to 0} \frac{2x + x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(2+x)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} (2+x) \; [\because x \neq 0] = 2$$

উদা. 3 : সীমা নির্ণয় করুন : $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} = \frac{(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x})(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+2x)-(1-3x)}{x(\sqrt{1+2x})\sqrt{1-3x})} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x}} \; (\because x \neq 0) = \frac{5}{2}$$

উদা. 4 : সীমা নির্ণয় করুন : $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}[\because x\neq 4]=\frac{1}{4}[\because x\to 4 \text{ হলে } \sqrt{x}\to 2$$

উদা. 5. দেখান যে, $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{a^{n-1}}$, n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে $\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots a^{n-1}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=a^{n-1}+a^{n-2}a+a^{n-3}.a^2+\ldots+a^{n-1}$$

$$=na^{n-1}$$

উপপাদ্য 1-এর পরে প্রয়োগ হিসাবে।

উদা. 6. দেখান যে $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{n}{1}}-a^{\frac{n}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}(a>0)=3a^3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{n}{2}}-a^{\frac{n}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{\frac{a}{2}}-a^{\frac{a}{2}}}{x-a}\right)=\frac{\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}} \text{ (5 নং উদাহরণ থেকে)}$$

$$=3\frac{a^2-a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}=3a^3$$

উদা. 7 যদি $f(x)=x^2, x<1$ তবে $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ নির্ণয় করুন।

$=2.5, x=1$

$=x^2+2, x>1$

এখানে, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} x^2 + 2 = 3$

আবার, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} x^2 = 1$ সুতরাং $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$

$\therefore$ সীমা নির্ণেয় নহে।

৬.৪.২ অসীমগামী চল ও অপেক্ষকের আলোচনা

কোনও চল x যদি ক্রমাগত বাড়তে থাকে এবং যে কোনও বৃহৎ ধনাত্মক সংখ্যা থেকে বড় মান গ্রহণ করে—তখন সেই চল x অসীমে যায় বা $x \to \infty$ (infinite)

মনে করি $f(x) = \frac{1}{x}$. এক্ষণে x এর মান ধনাত্মক থেকে যত ছোট হতে থাকবে f(x)-এর মান তত বড় হতে থাকবে। এরূপস্থলে লেখা হয় $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ এবং $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ এস্থলে দক্ষিণপক্ষ সীমা এবং বামপক্ষ সীমা সমান নহে। আবার $f(x) = \frac{1}{x^2}$ হইলে $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty$ এবং $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

আবার $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$

উপপাদ্য 1. সীমা বিষয়ক উপপাদ্য

যদি $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ এবং $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = \ell^1$ হয়

তবে, (i) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm \phi(x)] = \ell \pm \ell^1$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x).\phi(x)] = \ell.\ell^1$

(iii) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\ell}{\ell^1}$ যদি $\ell^1 \neq 0$ হয়।

(iv) $\lim\limits_{x \to a} c.f(x) = c\ell$ [প্রমাণ দেওয়া হল না।]

৬.৪.৩ কয়েকটি আদর্শ লিমিট বা সীমা (Several Standard Limits)

আমরা নিম্নের কয়েকটি আদর্শ লিমিট ব্যবহার করব। (প্রমাণ এই পুস্তকে দেওয়া হল না।)

(i) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_e(1+x) = 1$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

উদা. 8 সীমা নির্ণয় কর $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 2$ $[\because \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0]$

৬.৪.৪ প্রশ্নমালা

1. সীমা নির্ণয় করুন :

(i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-2}{2x+2}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (iii) $\lim_{x\to a}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} (a \neq 0)$

(iv) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-6}{3x^2+2x+1}$ (v) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^4}$ (vi) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}$

2. যদি f(x) = x, x > 0 হয় তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ নির্ণয় করুন।

= 0, x = 0

= –x, x < 0

3. যদি f(x) = x^2, x > 1 তবে $\lim_{x\to 1} f(x)$ নির্ণয় করুন।

= 2, x = 1

= x, x < 1.

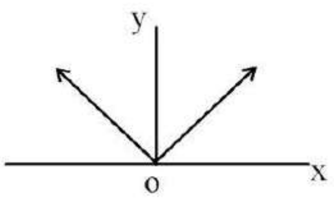
[উঃ (i) $\frac{1}{4}$ (ii) 1, (iii) $\frac{1}{a}$ (iv) $\frac{2}{3}$ (v) –1, (vi) 0, 2. (0), 3. (1)]

৬.৫ অপেক্ষকের সন্ততি

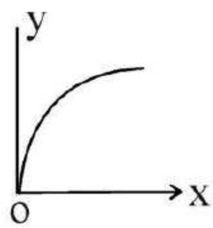
কোনও অপেক্ষকের লেখচিত্রে যদি কোনও ছেদ না থাকে তবে সাধারণভাবে অপেক্ষকটিকে লেখচিত্রের সীমার মধ্যে সন্তত (continuous) বলা হয়। যদি কোনও বিন্দুতে লেখচিত্র ছেদ থাকে তবে সেই বিন্দুতে অপেক্ষকটিকে অসন্তত (discontinuous) বলা হয়।

উদাহরণ :

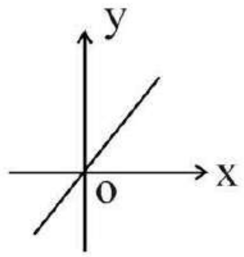
(i) f(x) = |x|



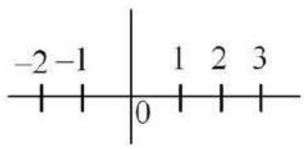
(ii) f(x) = $\sqrt{x}$



(iii) f(x) = $\frac{x^2}{x}$



(iv) f(x) = [x], [x] অর্থাৎ x থেকে বড় নয় এরূপ বৃহত্তম পূর্ণ সংখ্যামান অর্থাৎ x_1 = 3.2 হলে $[x_1]$ = 3.



(i) এবং (ii) এর অপেক্ষক দুটি সন্তত। (iii)-এর অপেক্ষক x = 0 এবং (iv) এর অপেক্ষকটি x = 1, 2, ...–1, –2 ইত্যাদি বিন্দুতে সন্তত নহে।

(v) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)}$ অপেক্ষকটির 1 < x < 2 পরিসরে কোনও বাস্তববিন্দু থাকবে না। অতএব এই পরিসরে f(x) অসংজ্ঞাত হবে। অতএব ঐ পরিসর অসন্তত।

৬.৫.১ সন্ততির গাণিতিক সংজ্ঞা

f(x) অপেক্ষকটিকে x = a বিন্দুতে সন্তত বলা হবে

যদি $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$ অর্থাৎ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

কোনও পরিসরের সকল বিন্দুতে যদি (f) সন্তত হয় তবে (f)-কে ঐ পরিসরে সন্তত বলা হয়।

উদা. 1. দেখান যে $f(x) = 5x + 3$, $x = 1$ বিন্দুতে সন্তত।

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x+3) = 8$ আবার f(1) = 8

অতএব $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ এবং f(x) অপেক্ষকটি x = 1 বিন্দুতে সন্তত।

এক্ষেত্রে f(x), x-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য সন্তত কারণ $\lim_{x\to a}(5x+3) = 5a+3$

উদা. 2. যদি $f(x) = -x,\ x \le 0$

$$= x,\ 0 < x < 1$$
$$= 2 - x,\ x \ge 1$$

তবে দেখান যে f(x), x = 0 এবং x = 1-এ সন্তত।

এখানে $f(0) = 0,\ \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(-x) = 0$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 0$

সুতরাং f(x), x = 0 বিন্দুতে সন্তত।

আবার, f(1) = 2 – 1=1. $\therefore \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}(2-x) = 1$

আবার, $\therefore \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x = 1$

$\therefore f(1) \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = 1$

সুতরাং f(x), x = 1 বিন্দুতে সন্তত।

উদা. 3. যদি $f(x) = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$

$= -1, x = 0$

দেখান যে, x = 0 বিন্দুতে f(x) সন্তত নহে।

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{|\infty|}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1}$$

(যেহেতু x → 0 অতএব $x \neq 0$)

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1$$

অতএব $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$ অতএব x = 0-তে f(x) সন্তত নয়।

উদা. 4. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ অপেক্ষকটি x = 1 বিন্দুতে কত হলে f(x), x = 1 বিন্দুতে সন্তত হবে?

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)$$

(যেহেতু x → 1 অতএব x – 1 $\neq$ 0) = 2

$\therefore$ f(1) = 2 হলে f(x), x = 1 বিন্দুতে সন্তত হবে।

উপপাদ্য 2.

সন্তত অপেক্ষকের কয়েকটি ধর্ম

লিমিটের সম্পর্কে উপপাদ্য 1 এর প্রয়োগ করে সন্ততির নিম্নের উপপাদ্য দেওয়া যায় :

মনে করি,

f(x) এবং $\phi(x)$, x = c বিন্দুতে সন্তত। তা হলে

(i) $f(x) + \phi(x)$ এবং $f(x) - \phi(x)$, x = c বিন্দুতে সন্তত হবে।

(ii) $f(x).\phi(x)$, x = c বিন্দুতে সন্তত হবে।

(iii) যদি $\phi(c) \neq 0$ হয়, তবে $\frac{f(x)}{(\phi x)}$, x = c বিন্দুতে সন্তত হবে।

(iv) $|f(x)|$ বা $|\phi(x)|$, c বিন্দুতে সন্তত।

প্রমাণ : (i) লিমিট উপপাদ্য অনুসারে—

$$\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a)$$

(যেহেতু f(x), g(x), x = a বিন্দুতে সন্তত। অতএব {f(x) + g(x)} ফাংশনটি x = a বিন্দুতে সন্তত একটির প্রমাণ।

৬.৫.২ প্রশ্নমালা

(1) $f(x) = \frac{x^4+2x+5}{x^2-8x+12}$ অপেক্ষকটির অসন্ততির বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন। [উঃ 6,2]

(2) $f(x) = \frac{|x|}{2x}$ অপেক্ষকটির অসন্ততির বিন্দু নির্ণয় করুন। [x = 0]

(3) প্রমাণ করুন যে, $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ অপেক্ষকটি x = 1 বিন্দুতে সন্তত নহে।

(4) যদি $f(x) = \frac{1}{2} - x,\ 0 < x < \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - x, \frac{1}{2} < x < 1$$

তবে দেখান যে $f(x) x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে অসন্তত।

(5) যদি $f(x) = 3 + 2x, -\frac{3}{2} \le x < 0$

$$= 3 - 2x, \ 0 \le x < \frac{3}{2}$$

$$= 3 - 2x, \ x \ge \frac{3}{2}$$

হয় তবে দেখান যে, f(x), x = 0 বিন্দুতে সন্তত কিন্তু $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে অসন্তত।

(6) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ হলে f(x), x = 4 বিন্দুতে সংজ্ঞাত নহে। f(4)-এর মান কত হলে f(x) অপেক্ষকটি x = 4 বিন্দুতে সন্তত হবে?

(7) যদি f(x) = 2, $-1 < x \le 0$

$$= 3, \ 0 < x \le 1$$

$$= 4, \ 1 < x \le 2$$

তবে দেখান যে f(x), x = 0 এবং x = 1 বিন্দুতে অসন্তত।

(8) যদি f(x) = 1, x > 0

$$= 0, \ x = 0$$

$$= -1, \ x < 0$$

দেখান যে f(x), x = 0 বিন্দুতে অসন্তত।

৬.৬ অনুশীলনী

১। শূন্যস্থান পূরণ করুন :

(ক) $\frac{2}{3}$ একটি ... সংখ্যা (খ) $\sqrt{2}$ একটি ... সংখ্যা (গ) $|x|$ = ...

(ঘ) $|x| = x + 5$ তাহলে x এর মান ... (ঙ) sinx ও cosx ... অপেক্ষক।

২। (ক) $\sqrt{x^2-5}$ এর ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

(খ) একটি যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষকের উদাহরণ ও তাদের লেখচিত্র আঁকুন।

(গ) সমক্রমী অপেক্ষকের একটি উদাহরণ লিখুন।

(ঘ) আবৃত অপেক্ষকের উদাহরণ ও তার লিখচিত্র আঁকুন।

৩। শূন্যস্থান পূরণ করুন :

(i) $f(x) = x^2$, x = 0 বিন্দুতে ... (ii) x = 0 বিন্দুতে $\frac{|x|}{x} =$ ....

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2} =$ ..... (iv) tanx অপেক্ষকের অসন্ততির বিন্দু...

৪। যদি $f(x)=\frac{|x|}{x}, x \neq 0$ এবং একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, দেখান যে $|f(k) - f(-k)| = 2$

৫। x-এর কোন কোন মানের জন্য $f(x)=\sqrt{8+2x-3x^2}$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞায়িত হবে তা নির্ণয় করুন

৬। x-এর কোন কোন মানের জন্য $f(x)=\sqrt{\log e\frac{4x-x^3}{3}.x}$ সংজ্ঞায়িত হবে তা নির্ণয় করুন।

৭। ধর $f(x)-x^2\cos\frac{1}{x}$ যখন $x \neq 0$ =0 যখন x = 0 f(x) অপেক্ষকটি x = 0 বিন্দুতে সন্তত কিনা তা নির্ণয় করুন।

একক ৭ ☐ অবকলন ও অপেক্ষকের বিস্তৃতি (Differentiation)

গঠন

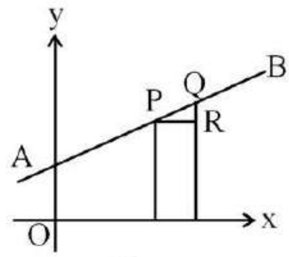
৭.১ উদ্দেশ্য

এই এককে অন্তরকলনের ধারণা, উদ্দেশ্য, জ্যামিতিক ব্যাখ্যা তুলে ধরা হয়েছে। এছাড়া বিভিন্ন আকারের অপেক্ষকের অন্তরকলন, অন্তরকলনের সাধারণ নিয়মাবলী আলোচিত হয়েছে যা অবকলন ও অপেক্ষকের বিস্তৃতি সম্পর্কে বাস্তব জ্ঞান দেবে।

Tuesday, January 01, 2002
2:33 AM

৭.২ নতিমাত্রা (Gradient)

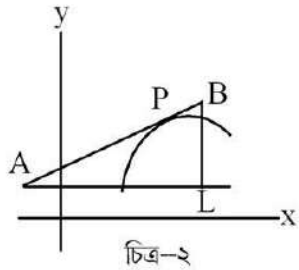
(i) সরলরেখার নতি :AB সরলরেখার Q বিন্দুর ভুজ P বিন্দুর ভুজ হইতে PR বৃদ্ধি পেয়েছে। আবার Q বিন্দুর কোটি QR বৃদ্ধি পেয়েছে। $\frac{QR}{PR}$ অনুপাতকে P বিন্দুতে AB সরলরেখার নতি (Gradient) বলে (চিত্র ১ দেখুন)।



চিত্র—১

মনে রাখতে হবে একটি সরলরেখার নতিমাত্রা প্রতি বিন্দুতে সমান। Q বিন্দুটি P অন্য পার্শ্বে নেওয়া হলেও P বিন্দুতে নতি একই থাকবে।

(ii) বক্ররেখার নতি : কোনও বক্ররেখার উপর কোনও বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতিকে ঐ বিন্দুতে **বক্ররেখার নতি** বলা হয়। এখানে AB, P বিন্দুতে বক্ররেখাটির একটি স্পর্শক (চিত্র-২)। $\frac{BL}{AL}$ অনুপাতটি P বিহন্দুতে বক্ররেখাটির নতি হবে।



চিত্র—২

যদি বক্ররেখার উপর কোনও বিন্দুতে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে তার উপর দুটি বিন্দুর ভুজের বৃদ্ধি শূন্য হবে। এক্ষেত্রে স্পর্শকের নতি অসীম (infinity) বলা হবে। আবার বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির নতি শূন্য হবে।

৭.৩ অপেক্ষকের অন্তরকলন বা অবকলন (Differentiation)

সংজ্ঞা : মনে করি y = f(x) অপেক্ষকটি x-এর কোনও পরিসরে সংজ্ঞাত। এখন যদি একটি বিন্দু x-এর সাপেক্ষে কোনও ক্ষুদ্র পরিবর্তন Δx (বা δxদ বা h) দেওয়া যায় তবে মনে করি y-এর পরিবর্তন হবে Δy (বা δy বা k)।

$\therefore\ y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ বা, $\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$

বা, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

যদি $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$-এর অস্তিত্ব থাকে এবং সসীম হয় তবে ঐ লিমিটটিকে f(x)-এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ (derivative) বা অবকলন সহগ (differential coefficient) বলে এবং $\frac{dy}{dx}\left(= \frac{d}{dx}(y)\right)$ বা $f'(x)$ দ্বারা চিহ্নিত হয়।

অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ এর অস্তিত্ব থাকলে লেখা হয় $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

অর্থাৎ $f'(c)$, $f(x)$ এর $x = c$ বিন্দুতে অবকলন সহগ, অবকলন প্রক্রিয়া সীমা নির্ণয়ের মাধ্যমে হয়ে থাকে। অতএব $f(x)$ অপেক্ষকের x-বিন্দুতে অবকলন নির্ণয় করা যাবে যদি

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ হয়।

অর্থাৎ দক্ষিণ অবকলন সহগ এবং বাম অবকলন সহগ অস্তিত্বশীল এবং উহারা সমান হবে। অর্থাৎ $Rf'(x) = Lf'(x)$.

৭.৩.১ উদাহরণমালা

উদা. 1. যদি $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ হয় তবে

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 5(x+h) + 1 - 3x^2 - 5x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6hx + 3h^2 + \cancel{5x} + 5h + 1 - \cancel{3x^2} - \cancel{5x} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6hx + 5h}{h} = \lim_{h \to 0}(3h + 6x + 5)$$

$= \lim_{h \to 0} 3h + \lim_{h \to 0} 6x + \lim_{h \to 0} 5$ (উপপাদ্য প্রয়োগ করে)

$= 0 + 6x + 5 = 6x + 5$

উদা. 2. মনে করি, $f(x) = 3x + 2,\ x \le 0$

$\qquad = -3x + 2,\ x > 0.$

$$Rf'(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-3h+2) - 2}{h} = -3$$

আবার, $Lf'(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{3h+2-2}{h} = 3$

$\therefore Rf'(0) \neq Lf'(0)$,

অতএব, f'(0) এর অস্তিত্ব নেই।

উদা. 3. মনে করি, $f(x) = \sqrt{x}; x > 0$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\sqrt{(x+h)}-\sqrt{x}\right]}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

উদা. 4. মনে করি, $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{x-x-h}{x(x+h)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{x^2} \; (\because x \neq 0)$$

উদা. 5. মনে করি, $f(x) = x^n, n$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{X\to x} \frac{x^n - x^n}{X - x} [X = x = h]$$

$$\lim_{X\to x} (X^{n-1} + X^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}) = nx^{n-1}$$

অতএব, $f'(x) = nx^{n-1}$ (n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

মনে রাখিতে হবে, n যে কোনও মূলদ সংখ্যা হলে প্রমাণ করা যায় যে, $f(x) = x^n$ এই ফাংশনটি

n র‍্যাশনাল (মূলদ) হলে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলনযোগ্য, এবং $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ যদি $x \neq 0$ হয়। n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে n = –m লিখলে m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। অতএব এইক্ষেত্রে $x \neq 0$ হলে আমরা পাই

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m - x^{-m}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^m(x+h)^m}{h(x+h)^m x^m} = -\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m - x^m}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{x^m(x+h)^m}$$

দক্ষিণ পক্ষের প্রথম লিমিট প্রথম ক্ষেত্র থেকে পাই $=mx^{m-1}$

অতএব, $f'(x) = -\frac{mx^{m-1}}{x^m x^m} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$

উদা. 6. a বিন্দুতে f(x)-এর অন্তরকলন, অর্থাৎ f′(a) থাকলে f(x) অপেক্ষক x = a বিন্দুতে সন্তত হবে।

আমরা জানি, $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{r(a+h) - f(a)}{h}$

এখন $f(a+h) - f(a) = \frac{r(a+h) - f(a)}{h} \times h(h \neq 0)$

$\therefore \lim_{h\to 0}\{f(a+h) - f(a)\} = \lim_{h\to 0}\frac{r(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h\to 0} h$ (যেহেতু প্রতিটি লিমিট আছে)

$= f'(a) \times 0 = 0$

$\therefore \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

সন্তুতির সংজ্ঞা থেকে পাই যে f(x), x = a বিন্দুতে সন্তত।

উদা. 7. $f(x) = e^x.f'(x)$ নির্ণয় করুন।

সংজ্ঞানুসারে $f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}}{h} = \lim_{h\to 0} e^x.\frac{e^h - 1}{h} = e^x.\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}$

$= e^x[\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1]$

উদা. 8. $f(x) = c^{ax}$ $f'(x)$ নির্ণয় করুন।

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{a(x+h)} - e^{ah}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{ax}\frac{\left(e^{ah} - 1\right)}{ah}.a$$

$$= a.e^{ax}\lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{ah} = ae^{ax}\left[\because \lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{ah} = 1\right]$$

উদা. 9. $f(x) = a^x . f'(x)$ নির্ণয় করুন।

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{a+h}}{h} = a^x.\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} = a^x\lim_{h\to 0}\frac{c^{h\log a}}{\log a.h}\log a$$

$$= a^x.\log a.\lim_{h\to 0}\frac{a^{h'}-1}{h'}[h' = h\log a] = a^x\log a.$$

উদা. 10. $f(x) = \log_e x$, $f'(x)$ নির্ণয় করুন, যেখানে $x > 0$.

$$f'(x) = h\xrightarrow{\lim} 0\frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h} = h\xrightarrow{\lim} 0\frac{1}{h}.\log_e\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}.\frac{x}{h}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{z}\log(1+z) \ \left[z = \frac{h}{x} \text{ ধরে}\right]$$

(যেহেতু x-এর মান h-এর উপর নির্ভর করে না)

$$= \frac{1}{x}[\because h\xrightarrow{\lim} 0\frac{1}{z}\log_e(1+z) = 1]$$

উদা. 11. $f(x) = c$ ধ্রুবক $f'(x)$ নির্ণয় করুন।

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = o \ [h \neq 0]$$

অতএব একটি ধ্রুবক ফাংশনের অবকল সহগ = 0

$f(x) = \sin x$ ও $f(x) = \cos x$-এর অন্তরকলন

(1) f(x) = sinx হলে

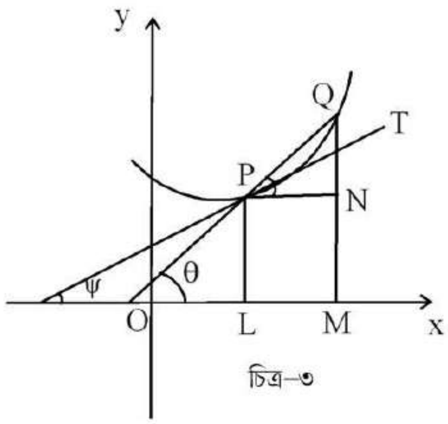
f(x+h) = sin(x+h)

$$\therefore \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.1 = \cos x$$

৭.৩.২ অন্তরকল সহগের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

মনে করি, P(x, y) একটি সন্তত বক্ররেখা y = f(x)-এর উপর অবস্থিত। মনে করি, P বিন্দুতে বক্ররেখাটির একটি স্পর্শক আছে যা y-অক্ষের সমান্তরাল নহে। মনে করি, $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$, y = f(x)-এর উপর অপর একটি বিন্দু। PL, QM Ox-এর উপর লম্ব টানা হল। এবং OX-এর সমান্তরাল করে PN টানা হল (চিত্র-৩)।



চিত্র–৩

$PN = LM = OM - OL = x + \Delta x - x = \Delta x$

এখন

$NQ = MQ - MN = MQ - LP$

$= y + \Delta y - y = \Delta y$

যেহেতু P এবং Q, y = f(x)-এর উপর দুইটি বিন্দু,

অতএব $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

অথবা $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

সুতরাং PQ জ্যা-এর নতি

$$= \tan\theta = \tan QPN = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

যদি Q → P হয় PQ → PT এবং Dx → 0

$$\therefore \text{PT এর নতি} = \tan\psi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

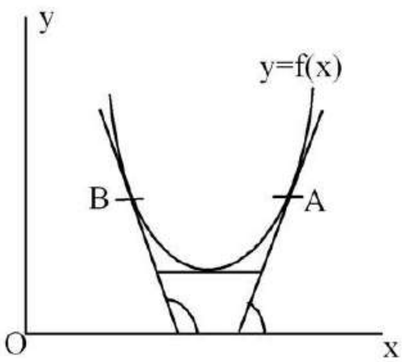
অতএব f′(x), P বিন্দুতে y = f(x)-এর স্পর্শকের নতি নির্দেশ করে।

মনে রাখবেন :

1. যদি $f'(x) > 0$ তবে (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে এবং x বৃদ্ধি পেলে f(x) বা y বৃদ্ধি পায় (চিত্র—4, A বিন্দু)।

2. যদি $f'(x) < 0$ হয়, তবে (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে এবং x বৃদ্ধি পেলে f(x) বা y হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। (চিত্র—4, B বিন্দু)।

3. যদি $f'(x) = 0$ হয় তবে (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হয় (চিত্র—4)।



চিত্র–৪

৭.৩.৩ অবকল বা অন্তরকল (Differential)

মনে করি $y = f(x)$ একটি অপেক্ষক এবং $\frac{dx}{dy}$ বা $f'(x)$ নির্ণেয়।

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

বা, $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \in$ এখানে $\in$ এমন একটি সংখ্যা যে $\in \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

বা, $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x.\ f'(x) +.\ \Delta x\ \in \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$

$\Delta x\ f'(x)$কে $y = f(x)$ এর x-বিন্দুতে অবকল বা অন্তরকল (differential) বলা হয় এবং df বা dy দ্বারা নির্দেশ করা হয়। $dy = df = f'(x)\ \Delta x$.

যদি $f(x) = x$ ধরা হয় তবে $f'(x) = 1$

এখন $df = dx = 1.\ \Delta x$.

অর্থাৎ $dx = \Delta x$ অর্থাৎ স্বাধীন চল x-এর অবকল dx ও x-এর বৃদ্ধি (increment) Δx সমার্থক।

অতএব আমরা পাই $\therefore dy = f'(x)dx$.

উদা. যদি $y = x^4$ হয় তবে $dy = 4x^3dx$.

যদি $y = \log_e x$ হয়, তবে $dy = \frac{1}{x}dx$.

উদা. দেখান x-এর বৃদ্ধির সঙ্গে $y = (x^3 - 3x^2 + 3x)$ অপেক্ষকটির কিরূপ বৃদ্ধি পায়?

$y = x^3 - 3x^2 + 3x$ বা, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} > 0$, x-এর সব বাস্তব মানের জন্য।

$\therefore y = f(x)$ অপেক্ষকটি x-এর সহিত বৃদ্ধি পায়।

৭.৩.৪ অন্তরকলনের কয়েকটি সাধারণ নিয়ম

যদি u(x), v(x), w(x)...কয়েকটি সসীম সংখ্যক অপেক্ষক হয় তবে,

I. $\frac{d}{dx}[u(x) \pm v(x) \pm w(x)...] = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm ...$

II. $\frac{d}{dx}[u(x).v(x)] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$

$$\frac{d}{dx}[u(x).v(x).w(x)] = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[c.u(x)] = c.\frac{du}{dx} \quad [\text{c ধ্রুবক}]$$

III. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] v(x) \neq 0$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

IV. যদি $y = f(u)$ এবং $u = \varphi(x)$ হয় তবে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = f'(u).\varphi'(x)$$

উদা. x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন : $3x^5 + 7x^4 - 2x^2 - x + 6$

মনে করি $y = 3x^5 + 7x^4 - 2x^2 - x + 6.$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[3x^5] + \frac{d}{dx}[7x^4] - \frac{d}{dx}[2x^2] - \frac{d}{dx}[6].$

$= 3.5x^4 + 4.7x^3 - 2.2x - 1 + 0$

$= 15x^4 + 28x^3 - 4x - 1$

উদা. $y = x^n.e^x$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx} = x^n.\frac{d}{dx}(e^x).\frac{d}{dx}(x^n) = x^n.e^x + e^x.nx^{n-1}$$

উদা. $y = (x^2 + 7)(x^3 + 10)$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+7)\frac{d}{dx}(x^3+10) + (x^3+10)\frac{d}{dx}(x^2+7)$$

$= (x^2 + 7)(3x^2) + (x^3 + 10)(2x)$

$= 3x^4 + 21x^2 + 2x^4 + 20x = 5x^4 + 21x^2 + 20x.$

উদা. $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)\frac{d}{dx}(1+x^2) - (1+x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{(1-x^2).2x - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2x(1-x^2+1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

উদা. $y = \frac{x^n}{\log x}$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x.\frac{d}{dx}(x^n) - x^n.\frac{d}{dx}(\log x)}{(\log x)^2} = \frac{\log x.nx^{n-1} - \frac{x^n}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{n\log x.x^n - x^n}{x(\log x)^2} = \frac{x^{n-1}(n\log x - 1)}{(\log x)^2}$$

উদা. y = e^{ax^2+bx+c} $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

মনে করি u = $ax^2 + bx + c$. $\therefore$ y = e^u. u = $ax^2 + bx + c$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u.(2ax+b) = e^{ax^2+bx+c}.(2ax+b).$$

উদা. y = $(1 - 5x)^4$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

মনে করি, $(1 - 5x) = u$. সুতরাং $y = u^4$ এবং $u = 1 - 5x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3.(-5) = -20u^3 = -20(1-5x)^3.$$

৭.৩.৫ লগারিদম্-মূলক অবকলন

উদা. $x^y.y^x = 1$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

উভয়পক্ষে লগারিদম্ নিয়ে পাই

$\log_e x^y + \log_e y^x = \log_e 1$ বা, $y\log_e x + x\log_e y = 0$

x-এর সাপেক্ষে অবকলন নিলে (y-কে x-এর অপেক্ষক মনে করে)

$$\frac{dy}{dx}.\log_e x + y.\frac{1}{x} + 1.\log_e y + x\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\because \frac{dy}{dx}(\log_e x + \frac{x}{y}) = -\left(\frac{y}{x} + \log_e y\right) \text{ বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x} + \log_e y\right)}{\left(\frac{x}{y} + \log_e x\right)}$$

উদা. y = x^x. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$\log y = \log_e x^x = x\log_e x,$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dx}{dy} = \log_e x + x.\frac{1}{x} = \log_e x + 1$$

বা, $\frac{dy}{dx} = y(\log_e x + 1) = x^x(\log_e x + 1)$

৭.৩.৬ অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলন (Differentiate of Implicit Function)

$f(x, y) = 0$ সমীকরণ থেকে $y = \varphi(x)$ আকারে প্রকাশ করা কখনও কখনও অসুবিধাজনক। যদিও এসব ক্ষেত্রে y, x-এর অপেক্ষক হতে পারে। এইসব স্থলে y-কে x-এর অব্যক্ত অপেক্ষক (Implicit Function) বলে।

উদা. $ax^2 + 2hry + by^2 = 0$ একটি অব্যক্ত অপেক্ষক।

এই ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে যে কোনও বিন্দু (x,y) যেখানে $hx + by \neq 0$.

x-এর সাপেক্ষে অবকলন নিলে পাই, (এখানে y, x-এর আপেক্ষক)

$$2ax + 2hy + 2hx.\frac{dy}{dx} + 2by\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $-(ax + hy) = \frac{dy}{dx}(hx + by)$ বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy}{hx + by}$

উদা. $x^3 + y^3 = 3axy$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

x-এর সাপেক্ষে অবকলন লইলে পাই

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3ay + 3ax\frac{dy}{dx}$$

বা, $(3x^2 - 3ay) = \frac{dy}{dx}(3ax - 3y^2)$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2ay}{ax - y^2}$, যেখানে $ax - y^2 \neq 0$

প্রচলিক সমীকরণ থেকে অপেক্ষকের অবকলন নির্ণয় (Parametric Differentiation) :

y, x-এর অপেক্ষক এবং তাদের সম্পর্ক একটি প্রচল **t**-এর বিভিন্ন মানের জন্য জানা আছে। $x = \phi(t)$ এবং $y = \psi(t)$, t প্রচল।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$ যেখানে $\frac{dx}{dt} \neq 0$. [যদি নির্ণেয় $\frac{dt}{dx}$ হয়]

উদা. $x=\sqrt{1+t}, y=\sqrt{1-t}$ যেখানে $0 \le t \le \frac{1}{2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(1+t)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}} \text{ হলে } \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\frac{1(-1)}{\sqrt{1-t}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\therefore \left.\frac{dy}{dt}\right/\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}}/\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}}=-\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}$$

উদা. $x=t^2+\frac{1}{t^2}, y=t+\frac{1}{t}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dt}(t^2+t^{-2})=2t-2t^3 \text{ এবং } \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(1-\frac{1}{t^2}/2(t-t^{-3})=\frac{(t^2-1)}{t^2}.\frac{t^3}{2(t^4-1)}=\frac{t}{2(t^2+1)}$$

উদা. x^2-এর সাপেক্ষে x^5-এর অবকলন নির্ণয় করুন :

মনে করি $y = x^5$ এবং $z = x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dz}=\left.\frac{dy}{dx}\right/\frac{dz}{dx}$$

এখন, $\frac{dy}{dx}=5x^4$ এবং $\frac{dz}{dx}=2x$

$$\therefore \frac{dy}{dz}=\frac{5x^4}{2x}=\frac{5}{2}x^3$$

৭.৩.৭ অবকলন সহগের দ্বারা পরিবর্তনের হার নির্ণয়

মনে করি, $y = f(x)$ অপেক্ষকটি একটি বক্ররেখা নির্ণয় করে। মনে করি, x_1 এবং $x_2 y=f(x)$-এর উপর দুইটি বিন্দু। $y_1 = f(x_1)$ এবং $y_2 = f(x_2)$

$$\therefore \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$\therefore$ ইহাকে (x_1, x_2)-র মধ্যে y-এর গড় পরিবর্তন বলা হয়।

এখন যদি $\Delta x \to 0$ হয়, এবং যদি $\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_1)$

$= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$ নির্ণেয় হয় তবে $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$ -কে x_1 বিন্দুতে y-এর পরিবর্তনের হার বলা হয়।

উদা. যদি $y = x^3$ এবং x, 10 একক প্রতি মিনিটে বৃদ্ধি পায় তবে যখন x = 3 হইলে y-এর পরিবর্তনের হার নির্ণয় করুন।

t = সময়ের একক মিনিট।

$$\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}x^2 = 3\times 10.x^2$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=3} = 3\times 10\times 9 = 270$$ একক/মিনিট।

উদা. $8y = x^3 - 12x + 16$ বক্ররেখার (0,2) বিন্দুতে স্পর্শকের গতি নির্ণয় কর এবং স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

$$8.\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 \;\therefore 8\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -12$$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$ অতএব (0,2) বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হল $\left(-\frac{3}{2}\right)$

অতএব ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $y-2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}(x-0)$

বা, $y-2 = -\frac{3}{2}x$ বা, $2y - 4 + 3x = 0$

উদা. মনে করি $f(x) = |x|$ অর্থাৎ $f(x) = x, x > 0$

$= 0, \; x = 0$

$= -x, x < 0$

আমরা দেখেছি $f(0+0) = f(0-0 = f(0) = 0$

$\therefore$ f(x), x = 0 বিন্দুতে সন্তত।

কিন্তু $L.f'(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h-0}{h} = -1$

আবার, $Rf'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h-0}{h} = 1$

$\therefore Lf'(0) \neq rf'(0)$. সুতরাং f'(0) নির্ণেয় নয়।

৭.৩.৮ প্রশ্নমালা

1. সংজ্ঞা থেকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $x^3 + 2x$ [উঃ $3x^2 + 2$] (ii) $\frac{1}{x}$ [উঃ $-\frac{1}{x^2}$] (iii) e^{2x} [উঃ $2.e^{2x}$]

(iv) $\frac{1}{\sqrt{x}}(x > 0)$ [উঃ $-\frac{1}{2}.\frac{1}{x\sqrt{x}}$] (v) 10^{2x} [উঃ $2.10^{2x}\log_e 10$] (vi) $e^{\sqrt{x}}$ [উঃ $\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$]

2. নিম্নলিখিত অপেক্ষগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $(x^2 - 3)^3$ [উঃ $3(x^2 - 3)^2.2x$] (ii) $(x + 2)(x + 1)^2$ [উঃ $(x + 2)(x + 1)^2$]

(iii) $\frac{(1+x)^3}{x}$ [উঃ $-x^{-2} + 3 + 2x$] (iv) $\frac{1}{1-2x^2}$ [উঃ $\frac{4x}{(1-2x^2)^2}$]

(v) $4x^{-\frac{3}{4}} + 6x^{\frac{1}{2}} + 2$ [উঃ $-3x^{-\frac{7}{4}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$]

3. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $x^n e^x$ [উঃ $e^x(nm^{n-1}+x^n)$] (ii) $x^2\log x$ [উঃ $2x\log x + x$]

(iii) $(x^2 + 7)(x^3 + 10)$ [উঃ $2x(x^3 + 10) + (x^2 + 7)3x$

(iv) $10^x.x^{10}$ [উঃ $10^x(10x^9 + x^{10}\log_e 10)$]

(v) $\sqrt{x}.e^{10}$ [উঃ $e^x[\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}]$ (vi) $x^2\log x^2$ [উঃ $2(x + 2x\log x]$

4. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $\frac{x}{e^x-1}$ [উঃ $\frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}$] (ii) $\frac{x^n}{\log x}$ [উঃ $\frac{nx^{n-1}\log x - x^{n-1}}{(\log x)^2}$]

(iii) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ [উঃ $\frac{4x}{(1-x^2)^2}$] (iv) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ [উঃ $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$]

(v) $x.\frac{e^x+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}$ [উঃ $e^{2x}(1 + 2x)$] (v) $\frac{x^3-2+x^{-3}}{x-2+x^{-4}}$ [উঃ $2(x+1-x^{-2}-x^{-3})$]

5. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকলন সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $\sqrt{x^2+a^2}$ [উঃ $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$] (ii) e^{x^4} [উঃ $4x^3.e^{x^4}$]

(iii) e^{ax^2+px+c} [উঃ $e^{ax^2+bx+c}(2ax+b)$] (iv) $\sqrt{\log x}$ [উঃ $\frac{1}{2x\sqrt{\log x}}$]

(v) a^{5x+1} [উঃ $5a^{5x+1}.\log_e a$] (vi) $\log\sqrt{\log}$ [উঃ $\frac{1}{2x}$]

(vii) log logx [উঃ $\frac{1}{x\log x}$] (viii) $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$ [উঃ $\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$]

(ix) $\log(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})$ [উঃ $\frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$]

6. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

(i) $y = x^x$ [উঃ $x^x(\log x + 1)$] (ii) $y = x^{\log x}$ [উঃ $2 \log x.x^{(\log x-1)}$]

(iii) $y = x^{x^x}$ [উঃ $x^{x^x}\, x^x \{\log x (\log x + 1) + \frac{1}{x}\}$]

(iv) $y = \left(\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)^{1/2}$ [উঃ $\frac{-2a^2x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$]

(v) $y = \left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$ [উঃ $\frac{x.y}{x\sqrt{1-x^2}}$]

7. $\dfrac{dy}{dx}$ **নির্ণয় করুন :**

(i) $3x^4 - x^2y + 2y^3 = 0$ [উঃ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x(6x^2 - y)}{x^2 - 6y^2}$]

(ii) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ [উঃ $\dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/3}$]

(iii) x = y log (xy) [উঃ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y(x-y)}{x(x+y)}$]

(iv) $x^y = y^x$ [উঃ $\dfrac{y(x\log y - y)}{x(y\log x - x)}$]

(v) $x^y . y^x = 1$ [উঃ $-\dfrac{y^2(1-\log x)}{x^2(1-\log y)}$]

(vi) $e^{xy} - 4xy = \left[-\dfrac{y}{x}\right]$

8. $\dfrac{dy}{dx}$ **নির্ণয় করুন :**

(i) $x = at^2$, $y = 2at$ [উঃ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{t}$]

(ii) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}, y = 3at^2 / 1 + t^3$ [উঃ $t(2 - t^3)$ $[(1 - 2t^3)]$

(iii) $x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, y = b.\dfrac{2t}{1+t^2}$ [উঃ $\dfrac{b}{2at}(t^2 - 1)$]

(iv) $x = t^2 + \dfrac{1}{t^2}, y = t + \dfrac{1}{t}$ [উঃ $\dfrac{t}{2(t^2+1)}$]

9. যদি $f(x) = x \cos^{-1}x$, $\dfrac{dy}{dx}$ কত হবে?

10. যদি log(xy) = $x^2 + y^2$ দেখান যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$

11. সংজ্ঞা থেকে দেখান যে $\frac{d}{dx}(10^x) = 10^x \cdot 2 \cdot 3$

12. যদি $x^2 + y^2 - 1 = 0$ তাহলে $\frac{dy}{dx}$ কত হবে?

13. যদি $f(x, y) = x^3 + 3x + y^3 + 3y - 8 = 0$ তাহলে $x = y = 1$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

৭.৪ ক্রমিক অন্তরকলন (Successive Differentiation)

যদি $y = f(x)$, x এর একটি অপেক্ষক হয় তবে f(x) বা $\frac{dy}{dx}$ সাধারণত আবার x-এর একটি অপেক্ষক হয়। যদি $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ নির্ণেয় হয় তবে এই সীমাকে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকল সহগ বলে এবং $f''(x)$ বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অনুরূপে $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$...$f^n(x)$ গুলিকে যথাক্রমে তৃতীয়, চতুর্থ ....n-তম অন্তরকল সহগ বলে। মনে রাখবেন $f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = y_n = y^{(n)} = D^ny$ etc.

৭.৪.১ উদাহরণমালা

উদা. 1. মনে করি $y = x^4, \frac{dy}{dx} = 4x^3$

আবার $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(4x^3) = 4\frac{d}{dx}(x^3) = 4.3x^2 = 12x^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(12x^2) = 12\frac{d}{dx}(x^2) = 24x = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}(24x) = 24.\frac{d}{dx}(x) = 24 = \frac{d^4y}{dx^4}$$

অর্থাৎ, $\frac{d^4y}{dx^4} = 41, \frac{d^5y}{dx^5} = 0$

উদা. 2. যদি y = x^n হয়, (n-ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) তবে

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n! = n(n-1)(n-2)....3.2.1$$

উদা. 3. $y = e^{ax}, \ \therefore y_1 = a.e^{ax}, y_2 = a^2e^{ax}...y_n = a^ne^{ax}$

উদা. 4. $y = \frac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}, \ y_1 = \frac{-1}{(x+a)^2} = -1.(x+a)^{-2}$

$y_2 = (-1)(-2)(x+a)^{-3}$ অনুরূপে $y_n = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

$= (-1)^2.1.2.(x+a)^{-3}$

উদা. 5. $y = (ax + b)^m$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$ নির্ণয় করুন।

$$\frac{dy}{dx} = m(ax+b)^{m-1}.a, \ \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)(ax+b)^{m-2}.a^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-3)(ax+b)^{m-3}.a^3$$

উদা. 6. $y = \log_e(x+a)$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করুন।

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{x+a}, \ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(+\frac{1}{x+a}\right) = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

অনুরূপে দেখান যায় যে $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$

উদা. 7. $y = \frac{1}{x^2-a^2}$ হলে $\frac{d^n y}{dx^n}$ নির্ণয় করুন।

$$y = \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{x-a}\right) - \frac{1}{2a}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}.(-1).\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{2a}.(-1).\frac{1}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[(-1)\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{-1)}{(x+a)^2}\right]$$

অনুরূপে, $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$

উদা. 8. $x = at^2$, $y = 2at$ হলে দেখান যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2at^3}$

$$\frac{dx}{dt} = 2at, \frac{dy}{dt} = 2a \;\; \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{l}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2at}$$

$$= -\frac{1}{2at^3}$$

৭.৪.২ প্রয়োগমূলক উদাহরণ

উদা. 1. ধরুন সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক $C = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

গড়মূল্য অপেক্ষক এবং মার্জিনাল মূল্য অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং তাদের লেখচিত্র কি ধরনের হবে তা আলোচনা করুন।

উত্তর : গড়মূল্য = $\frac{C}{x} = \frac{ax^2+bx+c}{x} = ax + b + \frac{c}{x}$

মার্জিনাল মূল্য = $\frac{dC}{dx} = 2ax + b$

সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক একটি অধিবৃত্ত। এই অধিবৃত্তটি ধনাত্মক চতুর্থাংশ COX এর মধ্যে অবস্থিত। ইহা C অক্ষকে (o,c) বিন্দুতে ছেদ করে। এই অধিবৃত্তের অক্ষ C-অক্ষের সমান্তরাল।

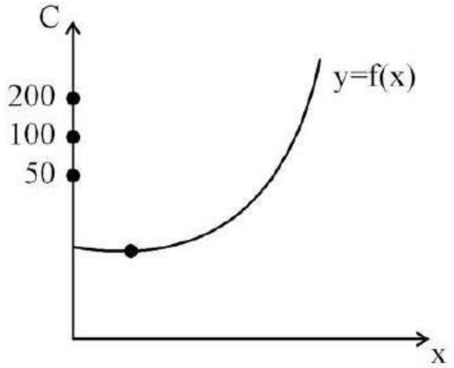
গড়মূল্য অপেক্ষক সাধারণত U আকৃতি বক্ররেখা।

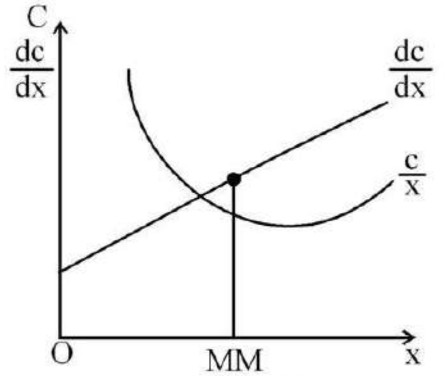
মার্জিনাল অপেক্ষক একটি সরল রেখা যার নতিমাত্রা 2a.

উদা. 2. যদি সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক $C = \frac{1}{50}x^2 + x + 40$, যেখানে x হল দ্রব্য পরিমাণ। তাহলে গড়মূল্য ও মার্জিনাল মূল্য অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং তাদের লেখচিত্র আঁকুন। (দেওয়া আছে গড়মূল্য $= \frac{C}{x}$, মার্জিনাল মূল্য $= \frac{dC}{dx}$

গড়মূল্য $= \frac{C}{x} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{50}x^2 + x + 40\right] = \frac{x}{50} + 1 + \frac{40}{x}$

মার্জিনাল মূল্য $= \frac{dC}{dx} = \frac{1}{25}x + 1$





লক্ষ্য করুন : (১) মার্জিন্যাল মূল্যরেখা, গড়মূল্য বক্ররেখার লঘিষ্ঠ বিন্দু দিয়া যায়।

(২) $\left(\frac{c}{x}\right) \to \alpha$ যদি $x \to 0+$

(৩) সম্পূর্ণমূল্য অপেক্ষক ক্রমবর্ধমান কিন্তু গড়মূল্য অপেক্ষক সব সময় ক্রমবর্ধমান হয় না।

উদা. 3. সম্পূর্ণ ক্রয়মূল্য অপেক্ষক $C = ae^{bx}$, $a > 0$, $b > 0$.

গড়মূল্য ও মার্জিনাল অপেক্ষকদ্বয় নির্ণয় করুন এবং ইহাদের লেখচিত্র আঁকুন।

উদা. 4. নিম্নোক্ত সম্পূর্ণ ক্রয়মূল্য অপেক্ষক সাপেক্ষে, গড়মূল্য অপেক্ষক, মার্জিনাল মূল্য অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

(ক) $C = \sqrt{2x+3} + 4$ (খ) $C = 2x^2 . \frac{x+1}{x+3} + 2$ (গ) $C = \frac{x(x+200)}{(x+100)}$

ধরি x একটি বিশেষ পণ্য, যার চাহিদা বাজারে বর্তমান। কত পরিমাণ x-এর চাহিদা তা অনেকটা পণ্যটির মূল্যের উপর নির্ভরশীল। যদি প্রতি একক পণ্যের মূল্য p হয় এবং x পরিমাণ পণ্য যদি চাহিদা হয়, তাহলে x-কে p-এর অপেক্ষক হিসেবে লেখা সম্ভব; গাণিতিক আকারে লেখা হয়।

$x = \phi(p)$

$\varphi(p)$কে x-এর **চাহিদা অপেক্ষক** বলা হয়।

p স্বাধীন চল, x পরাধীন চল এবং এরা কেবলমাত্র **ধনাত্মক মান গ্রহণ** করে।

যদি p-এর মান বাড়ে তাহলে x-এর মান কমে অর্থাৎ চাহিদা অপেক্ষকটি **ক্রম-হ্রাসমান**।

pকে x-এর নির্ভরশীল ধরা হয়, তখন $p = \psi(x)$ লেখা যায়।

$\varphi(p)$ এবং $\psi(x)$ অপেক্ষক দুটি **একমান বিশিষ্ট, সন্তত ও ক্রমহ্রাসমান।**

৭.৫ অনুশীলনী

1. $y = x^2\log_e x$ হলে y_3 নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{2}{x}$]

2. $y = e^{\frac{1}{x}}$ হলে y_3 নির্ণয় করুন। [উঃ $-\frac{1}{x^6}\left(6x^2+6x+1\right)$]

3. $y = \frac{\log_e x}{x}$ হলে দেখান যে $y_2(1) = -3$

4. $y = x^2e^x$ হলে দেখান যে $y_2(0) = 2$

5. $x^3 + yu^3 - 3axy = 0$ হলে y_2 নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{-2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$]

6. যদি $x = f(t)$, $y = q(t)$ হয় তবে দেখান যে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^3}\left[x_1 = \frac{dx}{dt}, y_1 = \frac{dy}{dt}\right]$$

7. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে y_2 নির্ণয় করুন।

(i) $y = \sqrt{x}$ [উঃ $-\frac{1}{4x^{3/2}}$]

(ii) $ax^2 + 2hxy + bh^2 = 1$ [উঃ $\frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}, hx+by \neq 0$]

8. যদি $y = x^2\log_e x$ হয় তবে দেখান যে $xy_3 = 2$.

9. $y = xe^{-x}$ হলে দেখান যে $xy_2 + xy_1 + y = 0$.

একক ৮ ❑ অপেক্ষকের চরম মান, সমকলন এবং এর জ্যামিতিক তাৎপর্য

গঠন

৮.১ উদ্দেশ্য

এই এককে অপেক্ষকের চরম মানের ধারণা ও তার নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। পরিশেষে ইনফ্লেকশন বিন্দুর ধারণা দেওয়া হয়েছে।

এই এককে অপেক্ষকের সমাকলের ধারণা, সমাকলের ধর্ম, কতিপয় আদর্শ সমাকলন, সমাকলন পদ্ধতি, আংশিক সমাকলন, মূলদ ভগ্নাংশের সমাকলন আলোচিত হয়েছে।

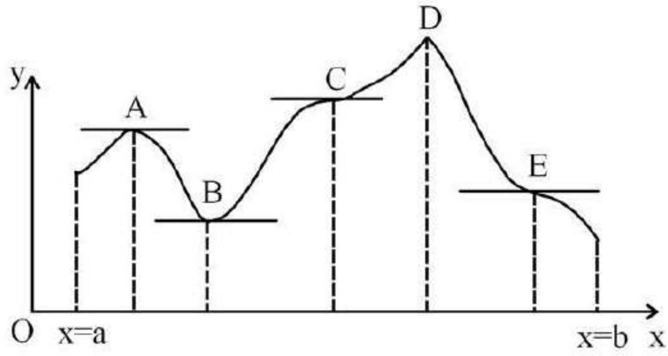
এছাড়া নির্দিষ্ট সমাকল ও তার মূল উপপাদ্য, নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্ম, সমাকলনের সাহায্যে ক্ষেত্রফল ধারণা দেওয়া হয়েছে। প্রতিটি বিষয়ে ধারণা সহজতর করার জন্য নানা উদাহরণের সাহায্য নেওয়া হয়েছে।

৮.২ ঊর্ধ্ব চরম মান (Local Maximum) নিম্ন চরম মান (Local Minimum)

মনে করি, $y = f(x)$ অপেক্ষকটি $x = c$ এর সামীপ্যে সংজ্ঞাত। $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = c$তে স্থানীয় ভাবে ঊর্ধ্ব চরম মান প্রাপ্ত হয়েছে বলা হবে যদি, $x = c$ এর সামীপ্যে x এর যে কোনও মানের জন্য $f(c) > f(x)$ হয়।

অর্থাৎ যদি $f(c + h) - f(c) < 0$ যখন $|h|$ যথেচ্ছ ছোট।

অনুরূপে $f(x)$, $x = d$তে নিম্ন চরম মান প্রাপ্ত হবে যদি x এর একটি সামীপ্যে x-এর সকল মানের জন্য $f(d + h) - f(d) > 0$, যখন $|h|$ যথেচ্ছ ছোট।



উপরের চিত্রে $x = a$ এবং $x = b$ এর মধ্যে $f(x)$ এর চিত্র অঙ্কিত হয়েছে। A, B, C, D, E বিন্দুগুলিতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। $f(x)$ অপেক্ষকটি A বিন্দুতে স্থানীয়ভাবে ঊর্ধ্ব চরম মান, B বিন্দুতে স্থানীয়ভাবে নিম্ন চরম মান এবং D বিন্দুতে অনিয়ন্ত্রিত (Absolute) ঊর্ধ্ব চরম মান প্রাপ্ত হয়েছে। C ও E বিন্দুতে $f(x)$ এর কোন চরম মান নেই। x এর যে মানের জন্য $f(x)$ এর চরম মান আছে তাকে চরম বিন্দু (Extremum pt.) বলে।

উপপাদ্য 1. যদি $f''(c)$ নির্ণেয় হয় এবং $f'(c) = 0$ হয়, কিন্তু $f''(c) \neq 0$ তবে $f(x)$, $x = c$-তে ঊর্ধ্ব চরম মান প্রাপ্ত হবে যদি $f''(c) < 0$ হয়; $x = c$-তে $f(x)$ নিম্ন চরম মান প্রাপ্ত হবে যদি $f''(c) > 0$ হয়।

উপপাদ্য 2. যদি $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{n-1}(c) = 0$ এবং $f^{n}(c) \neq 0$ হয়, তবে—

(i) n যুগ্ম হলে, $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এর (ক) ঊর্ধ্ব চরম মান থাকবে যদি $f^{n}(c) < 0$ (খ) নিম্ন চরম মান থাকবে যদি $f^{n}(c) > 0$ হয়।

(ii) যদি n অযুগ্ম হয়, তবে $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$-এর কোন চরম মান নেই।

উদা. 1. x-এর যে মানগুলির জন্য $x^3 - 9x^2 | 15x - 3$ এর চরম মান আছে সেই মানগুলি নির্ণয় করুন।

মনে করি, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5)$

$\therefore f'(x) = 0$ থেকে পাই $x^2 - 6x + 5 = 0$ বা, $x^2 - 5x - x + 5 = 0$

বা, $(x - 5)(x - 1) = 0$ অতএব $x = 1$ এবং $x = 5$ বিন্দুদ্বয়ে $f(x)$-এর চরম মান থাকতে পারে। এখন $f''(x) = 6x - 18$, এখন $f''(1) < 0$ এবং $f''(5) > 0$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$-এর ঊর্ধ্ব চরম মান আছে এবং $x = 5$ বিন্দুতে $f(x)$-এর চরম মান আছে।

f(x)-এর উর্ধ্ব চরম মান = $1^3 - 9 \times 1^2 + 15 \times 1 - 3 = 1 - 9 + 5 - 3 = 4$

f(x)-এর নিম্ন চরম মান = $5^3 - 9 \times 5^2 + 15 \times 5 - 3$

$= 125 - 225 + 75 - 3 = -28$

উদা. 2. দেখান যে $x+\frac{1}{x}$ এর উর্ধ্ব চরম মান উহার নিম্ন চরম মান অপেক্ষা ছোট।

মনে করি, $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ $f'(x)=0$ থেকে পাই $\frac{1}{x^2}=1$ বা, $x^2 = 1$

$\therefore x=\pm 1$

এখন $f''(x)=+\frac{2}{x^3}$ $\therefore f''(1)>0$ এবং $f''(-1) < 0$

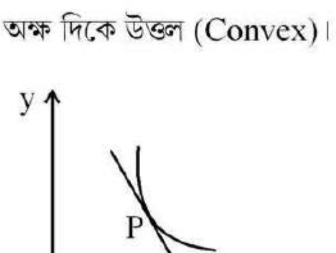
সুতরাং অপেক্ষকটির x = –1-এ উর্ধ্ব চরম মান আছে x = 1-এ নিম্ন চরম মান আছে।

উর্ধ্ব চরম মান = –2 এবং নিম্ন চরম মান = 2

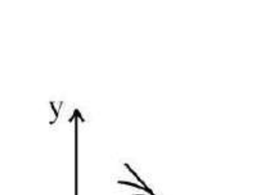
∴ উর্ধ্ব চরম মান < নিম্ন চরম মান।

৮.২.১ বক্ররেখার কোনও বিন্দুতে অবতলতা ও উত্তলতা (Concavity and Convexity)

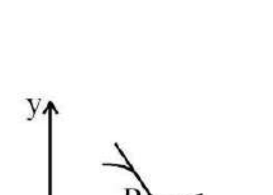
ধরা যাক, y = f(x) একটি বক্ররেখার (আয়তক্ষেত্রাকার অক্ষরেখাদ্বয়ের সাপেক্ষে) সমীকরণ। ঐ বক্ররেখার উপর P এমন একটি বিন্দু যার স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল নয়। এখন বক্ররেখাটি যদি ঐ স্পর্শককে P বিন্দুতে অতিক্রম করে স্পর্শকের একধার থেকে অন্যধারে না যায়, তা হলে আমরা বলি যে বক্ররেখাটি P বিন্দুতে ধনাত্মক y-অক্ষ দিকে অবতল (concave), যদি বক্ররেখাটি ঐ স্পর্শকের সাপেক্ষে ধনাত্মক y-অক্ষ দিকে থাকে। আবার যদি বক্ররেখাটি স্পর্শকের সাপেক্ষে ঋণাত্মক y-অক্ষের দিকে থাকে, তবে আমরা বলি বক্ররেখাটি ঋণাত্মক y-অক্ষ দিকে অবতল অথবা বক্ররেখাটি ঐ বিন্দুতে ধনাত্মক y-অক্ষ দিকে উত্তল (Convex)।



(i) অবতল বিন্দু



(ii) উত্তল বিন্দু



(iii) ইনফ্লেক্সন বিন্দু

উদা. 3. দেখান যে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$ এর কোনও চরম মান নেই।

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 24 = 3(x^2 - 4x + 8)$

$\quad = 3[(x-2)^2 + 4]$

এখানে $f'(x)$, x-এর কোনও মানের জন্যই শূন্য হবে না।

অতএব $f(x)$-এর কোনও চরম মান নেই।

৮.২.২ প্রশ্নমালা

(1) $f(x) = 4x^2 - 15x^2 + 12x - 2$ হলে কোনও বিন্দুতে $f(x)$-এর উর্ধ্ব চরম মান এবং নিম্ন চরম মান আছে নির্ণয় করুন। [উঃ $x =$ (উর্ধ্ব চরম মান), $x = 2$ (নিম্ন চরম মান)]

(2) দেখান যে $x^3 - 6x^2 + 12x - 3$ এর $x = 2$ বিন্দুতে কোনও চরম মান নেই।

(3) দেখান যে $x^3 - 3x^2 + 6x + 3$-এর কোনও চরম মান নেই।

(4) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির চরম মান নিয়ে আলোচনা করুন।

(i) x^6[$x = 0$তে নিম্ন চরম মান আছে]

(ii) $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$ [$x = 1$-এ নিম্ন চরম মান, $x = 0$-তে উর্ধ্ব চরম মান]

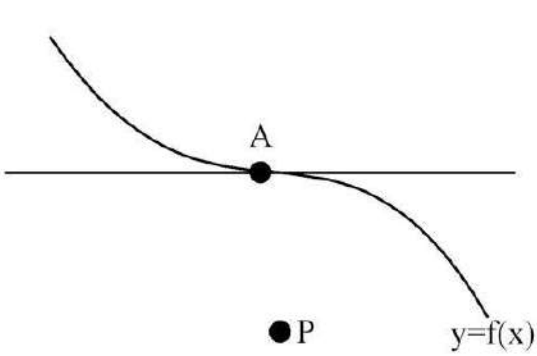
(5) দেখান যে, $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ -এর উর্ধ্ব চরম মান $e^{\frac{1}{e}}$

(6) দেখান যে $x/\log_e x$ এর নিম্ন চরম মান e.

৮.৩ ইনফ্লেকশন বিন্দু (Point of Inflexion)

কোনও বক্ররেখার কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু A-তে স্পর্শকরেখা বক্ররেখাটিকে অতিক্রম করে। এমত অবস্থায় বক্ররেখাটি P-এর সাপেক্ষে (স্পর্শক রেখার উপর অবস্থিত নহে।) A-এর একদিকে অবতল এবং অপর পার্শ্বে উত্তল হয়।

এরূপ বিন্দু A-কে f(x) অপেক্ষকটির ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দু (Point of Inflexion) বলে।



টীকা : (i) যদি একটি বক্ররেখা y = f(x)-এর A বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3}\neq 0$ হয় তবে A বিন্দু ইনফ্লেক্শন বিন্দু নহে।

উদা. 1. দেখান যে $\left(a-2, -\frac{2}{e^2}\right)$, $y = (x - a)\, e^{x-a}$ অপেক্ষকের ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দু।

$y = (x - a)e^{x-a}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = e^{x-a} + (x-a)e^{x-a} = (1+x-a)e^{x-a}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2+x-a)e^{x-a}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (3+x-a)e^{x-a}$$

$x = a - 2$ বিন্দুতে (যেখানে $y = 2e^{-2}$) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

এবং $\frac{d^3y}{dx^3} = e^{-2} \neq 0$

অতএব $\left(a-2, {}^{-2}\!/_{e^2}\right)$ একটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।

৮.৩.১ প্রশ্নমালা

1. দেখান যে মূল বিন্দু $y = x^2\log_e(1-x)$ এর একটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।
2. $c^2y = (x - a)^3$ এর ইনফ্লেকশন বিন্দু নির্ণয় করুন। [উঃ (a, 0)]

৮.৪ অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া হিসাবে অনির্দিষ্ট সমাকল (Indefinite Integral as the inverse of differential)

একটি x-এর অপেক্ষক f(x), জানতে চাই, যার অন্তকলন একটি পরিচিত অপেক্ষক $\phi(x)$, সুতরাং

$$\frac{df(x)}{dx} = \phi(x) \ldots (3.2.1)$$

(৩.২.১) সমীকরণটি হতে $f(x)$ এর সম্পূর্ণ ধারণা পাওয়া যায় না। আমরা জানি যদি $f(x)$ এর সাথে একটি ধ্রুবক যোগ করি তবে তার অন্তরকলনের কোনও পরিবর্তন হয় না, অতএব, যদি $f(x)$ (3.2.1)

সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে, তখন $f(x)$-এর স্থানে $g(x) = f(x) + c$ বসালেও এই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

অনির্দিষ্ট সমাকলনের সংজ্ঞা (definition of Indefinite Integral) : যে সকল অপেক্ষক $f(x)$ (3.2.1) সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে তাকে $\phi(x)$ অপেক্ষকের **অনির্দিষ্ট সমাকলন** বলা হয় এবং তা $\int \phi(x)dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(৩.২.১) সমীকরণটির যে কোনও সমাধান ও $f(x)$ সমাধানের বিয়োগ ফল একটি ধ্রুবক হয়। যদি সমীকরণটির অন্য একটি সমাধানকে $g(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহলে

$$\frac{d}{dx}[-f(x)+g(x)] = \phi(x) - \phi(x) = 0$$

অর্থাৎ $-f(x) + g(x)$ = ধ্রুবক সংখ্যা = c (ধরিলাম)

$\therefore\ g(x) = f(x) + c$

এখানে c একটি যে কোনও বাস্তব ধ্রুবক রাশি।

৮.৪.১ অপেক্ষকের সমাকল

এখানে কয়েকটি অপেক্ষকের অবকল এবং তাদের সমাকল দেওয়া হল :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, n\int x^{n-1}dx = x^n + c$$

$$\frac{d}{dx}(e^{kx}) = ke^{kx}, k\int e^{kx}dx = e^{kx} + c$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log_e x\right) = \frac{1}{x}, \int \frac{1}{x}dx = \log_e x + c \text{ যখন } x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx, m\int \cos mx dx = \sin mx + c$$

$$\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m\sin mx, \text{ অতএব } -m\int \sin mx dx = \cos mx + c$$

যদি $(n - 1) = m$ ধরা হয়, তাহলে $n = m + 1$ এবং $\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + c$

বা, $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$ যদি $m + 1 \neq 0$ অর্থাৎ যদি $m \neq -1$

যদি $m = -1$, তাহলে $\int x^m dx = \int \frac{dx}{x} = \log_e |x| + c$

এই সূত্রটি x-এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান-এর জন্য সিদ্ধ করে না যদি $x > 0$, $\log_e x$-এর মান নির্ণয় করা যায়। আর যদি $x < 0$, তাহলে $\log(x)$-এর মান অনির্ণেয় কিন্তু $\log(-x)$ নির্ণয় করা সম্ভব। এজন্য

$$\int \frac{dx}{x} = \log_e |x| + c$$

সূত্রটি $x = 0$ ছাড়া সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মানের জন্য প্রযোজ্য।

৮.৪.২ সমাকলের সাধারণ ধর্ম

যদি $f(x)$ ও $g(x)$ দুটি অপেক্ষক হয়, তাহলে

$$\int [\mathrm{A}f(x) \pm \mathrm{B}g(x)]dx = \mathrm{A}\int f(x)dx \pm \mathrm{B}\int g(x)dx$$

এখানে A ও B দুটি ধ্রুবক সংখ্যা

সীমিত সংখ্যক অপেক্ষক $f_1(x), f_2(x), \ldots . f_n(x)$ এর জন্য

$$\int [\mathrm{A}_1 f_1(x) \pm \mathrm{A}_2 f_2(x) \pm \ldots \pm \mathrm{A}_n f_n(x)]dx = \mathrm{A}_1 \int f_1(x)dx \pm \mathrm{A}_2 \int f_2(x)dx \ldots . \pm \mathrm{A}_n \int f_n(x)dx$$

কয়েকটি উদাহরণ

১। $\int (a_n x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x + a_k)dx$

$$= a_0 \int x^k dx + a_1 \int x^{k-1} dx + \ldots + a_{k-1} \int x dx + a_k \int x^0 dx$$

$$= \frac{a_0}{k+1} x^k + a_1 \frac{x^k}{k} + \ldots + a_{k-1} \frac{x^2}{2} + a_k^{\,x} + c$$

২। সমাকল নির্ণয় করুন :

(i) $\int (2+x)^3 dx = \int (8 + 12x + 6x^2 + x^2)dx$

$$= 8\int dx + 12\int x dx + 6\int x^2 dx + \int x^3 dx$$

$$= 8x + 6x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{4} + c$$

(ii) $\int \frac{x^2+2x+3}{x} dx$

$= \int \left(x + 2 + \frac{3}{x} \right) dx$

$= \int x dx + 2\int dx + 3\int \frac{1}{x} dx$

$= \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \log | x + c$

৩। সমাকলন নির্ণয় করুন :

(i) $\int \frac{2e^{2x}+3e^{4x}+4}{e^{3x}} dx$

$= \int \frac{2e^{2x}}{e^{3x}} dx + \int \frac{3e^{4x}}{e^{3x}} dx + \int \frac{4}{e^{3x}} dx$

$= 2\int e^{-x} dx + 3\int e^{x} dx + 4\int e^{-3} dx$

$= -2e^{-x} + 3e^{x} - \frac{4}{3} e^{-3x} + c$

(ii) $\int \left(e^{a\log x} + e^{x\log a} \right) dx$

$= \int x^{a} dx + \int a^{x} dx$

$= \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{1}{\log_e a} a^{x} + c$ (যেখানে $a + 1 \neq 0$ এবং $a > 0$)

৮.৪.৩ প্রশ্নমালা

1. x-এর সাপেক্ষে সমাকলন করুন :

(i) $\sqrt[3]{x}$ [উঃ $\frac{3}{4} x^{4/3} + c$]

(ii) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ [উঃ $\frac{3}{2}x^{2/3}+c$]

(iii) $\sqrt{x}\left(x^5+\frac{3}{4}\right)$ [উঃ $\frac{2}{13}x^{\frac{13}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+c$]

(iv) $x\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{11}{\sqrt{x}}$ [উঃ $\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{9}x^{3/2}+22x^{1/2}+c$]

(v) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ [উঃ $\frac{2}{3}x^{3/2}+2\sqrt{x}+c$]

(vi) $\frac{x^3+a^3}{\sqrt{x}(x+a)}$ [উঃ $\frac{2}{15}\sqrt{x}\left(3x^2-5ax+15a^2+c\right)$]

2. সমাকলন নির্ণয় করুন :

(i) $\int\frac{e^{5\log x}-e^{4\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}dx$ [উঃ $\frac{1}{3}x^3+c$]

(ii) $\int\frac{8^{1+x}+4^{1+x}}{2^x}dx$ [উঃ $\frac{4}{\log_{e^2}}\left(2^{2x}-\frac{1}{3}2^{-3x}+c\right)$]

3. x-এর সাপেক্ষে সমাকলন করুন :

(i) $3^x + 3^{-x}$ [উ: $\frac{1}{\log_{e^3}}3^x-\frac{1}{\log_{e^3}}3^{-x}+c$]

(ii) $\frac{e^{3x}+e^x}{e^x+e^{-x}}$ [উঃ $\frac{1}{2}e^{2x}+c$]

(iii) $5^{x+2}+\frac{1}{5^{x-2}}$ [উঃ $\frac{25}{\log_{e^5}}5^x-\frac{25}{\log_{e^5}}5^{-x}+c$]

4. সমাধান করুন : $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3$, যখন x = 4, y = 3 [উঃ 3y = x³ + 9x – 91]

৮.৪.৪ সমাকলনের কতিপয় নিয়মাবলী

আমরা জানি, $\frac{dy}{dx}[f_1(x) + f_2(x) - f_3 x + ...]$

$$= f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x) + ...$$

$\therefore$ (i) $\int\left[f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x) + ...\right]dx = f_1(x) + f_2 9x) - f_{3'}(x) + ... + c$

(ii) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$

উদা. x-এর সাপেক্ষে নিচের অপেক্ষকগুলির সমাকল নির্ণয় করুন :

(i) $x^{5/2} \int x^{5/2} dx = \frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} + c = \frac{2^{x^{1/2}}}{7} + c$

(ii) $x^{-3/4} \int x^{-3/4} dx = \frac{x^{-3/4+1}}{\frac{-3}{4}+1} + c = 4^{x^{\frac{1}{4}}} + c$

(iii) $\frac{(1+x)^3}{x} . \int \frac{(1+x)^3}{x} dx = \int \frac{1 + x^3 + 3x^2 + 3x}{x} dx$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int x^2 dx + \int 3x dx + \int 3dx = \log x + \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 3x + c$$

(iv) $\frac{e^{3x} + e^{5x}}{e^x + e^{-x}} . \int \frac{e^{3x} + e^{5x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^{3x} + (1 + e^{2x})}{(e^{2x} + 1) . \frac{1}{ex}} dx$

$$= \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + c$$

উদা. যখন $x = 1$, তখন $y = 3$ হলে $\frac{dy}{dx} = 1 + x$ এর সমাধান নির্ণয় করুন।

$\frac{dy}{dx} = 1 + x \quad \therefore y = \int(1+x)dx = x + \frac{x^2}{2} + c.$ উপরের শর্ত থেকে পাই

$3 = 1 + \frac{1}{2} + c$ বা, $c = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \ \therefore y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$

৮.৫ সমাকলন (Integration)

অন্তরকলন গণিত থেকে আমরা জানি,

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x, \frac{d}{dx}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 2x$$

$\frac{d}{dx}\left(x^2 + \frac{5}{2}\right) = 2x$ এবং সাধারণভাবে

$\frac{d}{dx}\left(x^2 + c\right) = 2x,$ এখানে c যে কোনও ধ্রুবক হতে পারে।

এক্ষণে $2x$-এর উপর অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া প্রয়োগ করলে পাওয়া যাবে $x^2 + c$ এই বিপরীত প্রক্রিয়াকে বলা হয় সমাকলন (Integration). সমাকলন প্রক্রিয়াকে $\int$ এই চিহ্ন দ্বারা লেখা হয়। অর্থাৎ, $\int 2x dx = x^2 + c.$ সমাকলন x-এর সাপেক্ষে বোঝাবার জন্য dx লেখা হয়। যেহেতু c যে কোনও একটি ধ্রুবক সুতরাং $\int 2xdx$ -কে অনির্দিষ্ট সমাকল (Indefinite integral) বলে। অনুরূপে—

$\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2$ এবং $\int 3x^2 dx = x^3 + c$

যদি $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ হয়, তবে $\frac{d}{dx}[F(x) + c] = f(x)$

অর্থাৎ, $\int f(x)dx = F(x) + c$ সুতরাং সমাকলন প্রক্রিয়া অন্তরকলন প্রক্রিয়ার বিপরীত প্রক্রিয়া।

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}.x^{n+1}\right) = x^n$ অর্থাৎ, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$ $\quad [n \neq -1]$

c সমাকল ধ্রুবক।

উদা. (i) $\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n}.dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x}$

(iii) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c, \int e^{mz'} dx = \frac{e^{mx}}{m} + c$

$\left[\therefore \frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}\right]$

৮.৫.১ পরিবর্ত পদ্ধতি (Method of Substitution)

মনে করি, $\mathrm{I} = \int f(x)dx$ এবং $x = \phi(z)$ – (1) এমন একটি ফাংশন যাহার অন্তরকলন আছে।

$\therefore \frac{d\mathrm{I}}{dx} = f(x)$ এবং $\frac{dx}{dz} = \phi'(z)$ এবং $dx = \phi'(z)dz$

এখন $\frac{dI}{dz} = \frac{dI}{dx}.\frac{dx}{dz} = f(x).\phi'(z) = f[\phi(z)]\phi'(z)$

সুতরাং $\mathrm{I} = \int f[\phi(z)]\phi'(z)dz$ —(2)

অতএব দেখা যাচ্ছে যে সমাকলন (1) থেকে সমাকলন (2) পেতে গেলে $f(x)$-এর জায়গায় $f[\phi(z)]$ এবং dx-এর জায়গায় $\phi'(z)dz$ বসাতে হবে।

পরিবর্ত পদ্ধতি অনেক ক্ষেত্রেই সমাকলনকে সহজতর করে।

উদা.1. $\mathrm{I} = \int (a+bx)^n dx.\ (n \neq -1)$

মনে করি $a + bx = z \quad \therefore$ উভয় পক্ষের অবকল নিলে পাই $bdx = dz$

$\therefore \mathrm{I} = \int z^n \frac{1}{b} dz = \frac{1}{b}.\frac{z^{n+1}}{n+1} + c = \frac{1}{b(n+1)}.(a+bx)^{n+1} + c$

উদা. 2. মনে করি $\mathrm{I} = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ এবং $f(x) = z \quad \therefore f'(x)dx = dz$

$\therefore \mathrm{I} = \int \frac{1}{z} dz = \log|z| + c = \log|f(x)| + c$

উদা. 3. $I = \int x\sqrt{x^2+1}dx.$ মনে করি $x^2 + 1 = z$ এবং $\therefore\ 2xdx = dz$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{z}dz - \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.z^{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+x)^{3/2} + c$$

উদা. 4. $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$ মনে করি $1 + e^{-x} = z$

$\therefore\ -e^{-x}dx = dz$

$$\therefore I = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = \int \frac{-dz}{z} = -\log_e z + c = -\log_e(1+e^{-x}) + c$$

উদা. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

মনে করি $\sqrt{x} = z\ \therefore x = z^2$

$dx = 2zdz$

$$I = \int \frac{2zdz}{z+z^2} = 2\int \frac{dz}{z+1} = 2\log_e(z+1) + c = 2\log_e\left(\sqrt{x}+1\right) + c$$

উদা. 6. $\int \frac{dx}{x(a+b\log_e x)}$

মনে করি $a + b\ \log_e x = z$

$$\therefore b.\frac{1}{x}dx = dz$$

$$\therefore I = \frac{1}{b}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{b}\log_e z + c = \frac{1}{b}\log_2(a+b\log x) + c$$

৮.৫.২ প্রশ্নমালা

সমাকলন নির্ণয় করুন :

(i) $\int x^2\sqrt{a^3+x^3}\,dx$ [উঃ $\frac{2}{9}\left(a^3+x^3\right)^{3/2}+c$]

(ii) $\int \frac{xdx}{(2x+1)^3}$ [উঃ $-(4x+1)/8(2x+1)^2+c$]

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ [উঃ $2\sqrt{x}-2\log(\sqrt{x}-1)$

2. (i) $\int (3x+2)\sqrt{2x+1}\,dx$ [উঃ $\frac{3}{10}(2x+1)^{3/2}+\frac{1}{6}(2x+1)^{3/2}+c$]

(ii) $\int \frac{1+x}{1-x}dx$ [উঃ $-x-2\log(1-x)+c$]

(iii) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{a+bx}}$ [উঃ $\frac{3}{5}b^{-2}(a+bx)^{5/3}-\frac{3}{2}ab^{-2}(a+bx)^{3/2}+c$]

3. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ [উঃ $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c$]

[$1-x=\frac{1}{z}$ ধরুন]

4. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}ax$ [উঃ $e^{x+\frac{1}{x}}+c$]

5. $\int \frac{(\log x)^2}{x}dx$ [উঃ $\frac{1}{3}(\log x)^3+c$]

6. $\int \frac{dx}{x\log x}$ [উঃ $\log(\log x)+c$]

7. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}dx$ [$z = x-\frac{1}{x}$ ধর] [উঃ $\frac{x}{1-x^2}+c$]

8. $\int \frac{(1+\log x)^3}{x}dx$ [উঃ $\frac{1}{4}(1+\log x)^4+c$]

9. $\int \frac{x^7 dx}{(1-x^4)^2}$ [উঃ $\frac{1}{4}(\log(1-x^4)+\frac{1}{1-x^4}+c$]

10. $\int \left(\frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}}\right)dx$ [z^4 = x ধর] [উঃ $\frac{4}{3}\left\{x^{3/4}-\log\left(1+x^{3/4}\right)\right\}+c$]

৮.৫.৩ কতিপয় আদর্শ সমাকলন

সমাকলন নির্ণয় করুন :

(i) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|, |x| \neq |a|, a \neq 0$

(ii) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right|$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log\left|\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right|$

(iv) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}(a \neq 0)$

(v) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2 \pm k^2}$

[(i) অথবা (iv)-এর অনুরূপ]

(vi) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx \ (a \neq 0, \ p \neq 0)$

$$= \frac{p}{2a}\left\{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \frac{2aq-pb}{p}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}\right\}$$

$$= \frac{p}{2a}\log_e(ax^2+bx+c)+(v) -$$ এর অনুরূপ।

(vii) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.(a>0) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm k^2}}\left[z = x+\frac{b}{2a}\right]$$

= (iii)-এর অনুরূপ।

(viii) $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, (a \neq 0, p \neq 0) = \frac{P}{2a}\int \frac{(2as+b)+\frac{2aq}{p}-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$= \frac{P}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \frac{2aq-pb}{p}\int \frac{dx}{\sqrt{2ax^2+bx+c}}$$

$= \frac{P}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$ + (vii)-এর অনুরূপ।

(ix) $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}[a \neq 0, c \neq 0]$

মনে করি $cx + d = z^2$.

$\therefore \mathrm{I} = 2\int \frac{dz}{az^2+(bc-ad)}$ (iv)-এর অনুরূপ।

(x) $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}(a \neq 0, p \neq 0)$

মনে করি $px+q = \frac{1}{z}$

$\mathrm{I} = -\int \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{AZ}^2+\mathrm{BZ}+\mathrm{C}}}$ (vii)-এর অনূরূপ।

(xi) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

৮.৫.৪ উদাহরণমালা

উদা. 1. $\int \frac{xdx}{x^4 - 1}$ মনে করি $x^2 = z \quad \therefore 2xdx = dz$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dZ}{c^2 - 1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c \qquad [(i) \text{ হতে}]$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + c$$

উদা. 2. $\int \frac{dx}{1 + x - x^2} = \int \frac{dx}{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x + x^2} = \int \frac{dx}{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$

$$= \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \int \frac{dz}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - z^2} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{5}}{2}}\log\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + z}{\frac{\sqrt{5}}{2} - z} + c\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5} + 2x - 1}{\sqrt{5} - 2x + 1} + c$$

উদা. 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + a^4}}$ put $x^2 = z \quad \therefore 2xdx = dz$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^4}} = \frac{1}{2}\log\left[\left(z + \sqrt{z^2 + a^4}\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2 + \sqrt{z^4 + a^4}\right| + c$$

উদা. 4. $\int \frac{dx}{e^x + e} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}}$ মনে করি $e^x = z \;\therefore\; e^x dx = dz$

$$I = \int \frac{e^x}{x^2 + 1} = \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x) + c \quad [(iv) \text{ ব্যবহার করে}]$$

উদা 5. $\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+2}$ মনে করি $e^x = z \quad \therefore\ 2xdx = dz$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{x^4+2x^2+1+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z+1)^2+1} = \frac{1}{2}.\tan^{-1}(z+1)+c$$

$$\frac{1}{2}\tan^{1}(x^2+1)+c$$

উদা. 6. $\int \frac{7x-9}{x^2-2x+35}dx = \int \frac{\frac{7}{2}(2x-2)-2}{x^2-2x+35}dx$

$$= \frac{7}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+35}dx - 2\int \frac{dx}{(x^2-2x+35}$$

$$= \frac{7}{2}\log(x^2-2x+35) - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+34} = \frac{7}{2}\log(x^2+2x+35)\frac{-2}{\sqrt{34}}\tan^{1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{34}}\right)+c$$

উদা. 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \quad \left[z = x+\frac{1}{2}\right]$

$$= \log\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x-2}\right]+c$$

উদা. 8. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2x^2-8x+5}}dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x-8)dx}{\sqrt{2x^2-8x+5}}$

মনে করি, $2x^2 - 8x + 5 = z \quad \therefore\ (4x-8)dx = dz$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{4}\int z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{2}\sqrt{z}+c = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-8x+5+c}$$

উদা. 9. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$ মনে করি $1+x = z^2 \quad \therefore\ dx = 2zdz$

$$I = \int \frac{2zdz}{(z^2+1).z} = 2\int \frac{dz}{z^2+1} = \tan^{-1}z+c = \tan^{-1}\sqrt{1+x}+c$$

উদা. 10. $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}}$ মনে করি $2x+3=\frac{1}{z}$ $\quad \therefore 2dx=-\frac{1}{z^2}dz$

$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-3\right),\ z=\frac{1}{2x+3}$

$$\therefore\ \mathrm{I}=\frac{-\frac{1}{2}\int \dfrac{dz}{z^2.\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}-3\right)^2+3.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-3\right)+2}}}{}=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$=-\sin^{-1}z+c=-\sin^{-1}\left(\frac{1}{2x+3}\right)+c$

৮.৫.৫ প্রশ্নমালা

মান নির্ণয় করুন :

1. $\int \frac{dx}{6x^2+7x+2}$ [উঃ $\log\frac{2x+1}{3x+2}+c$]

2. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+5}$ [উঃ $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(e^x+1\right)\right]+c$]

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+c$]

4. $\int \frac{x+1}{3+2x-x^2}dx$ [উঃ $-\log(x-3)+c$]

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\frac{x-a}{a}+c$]

6. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ [উঃ $2\sqrt{x^2+x+1}+2\log\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+c$]

7. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{4x+3}}$ [উঃ $\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{4x+3}-1}{\sqrt{4x+3}+1}\right)+c$]

8. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}(x+1)}\right)+c$]

9. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ [উঃ $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c$]

10. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}$ [উঃ $2\sqrt{x}+\log\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+c$]

11. $\int \frac{dx}{x\left[10+7\log x+(\log x)^2\right]}$ [উঃ $\frac{1}{3}\log\frac{2+\log x}{5+\log x}$]

12. $\int \frac{x^2dx}{x^2-4}$ [উঃ $x+\log\frac{x-2}{x+2}+c$]

13. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\left(\frac{3x+1}{(1+x)\sqrt{5}}\right)+c$]

14. $\int \sqrt{\frac{x-3}{x-4}}dx$ [উঃ $\sqrt{(x-3)(x-4)}+\log\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x}-4\right)+c$]

15. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$ [উঃ $\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+c$]

৮.৬ আংশিক সমাকলন (Integration by parts)

মনে করি, u এবং $v_1 x$ এর দুইটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক। অন্তরকলন পদ্ধতি হইতে জানি,

$$\frac{d}{dx}(uv_1)=\frac{du}{dx}.v_1+u\frac{dv_1}{dx}$$

x-এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষে সমাকলন করিলে পাওয়া যায়

$$uv_1=\int\left(\frac{du}{dx}v_1\right)dx+\int\left(u\frac{dv_1}{dx}\right)dx$$

অর্থাৎ, $\int\left(u.\frac{dv_1}{dx}\right)dx = uv_1 - \int\left(\frac{du}{dx}v_1\right)dx$

মনে করি, $\frac{dv_1}{dx} = v$ অর্থাৎ $v_1 = \int vdx$

সুতরাং $\int uvdx = u\int vdx - \int\left(\frac{du}{dx}\int vdx\right)dx$

ইহাই দুইটি অপেক্ষকের গুণফলের আংশিক সমাকলনের সূত্র এবং ইহাকে আংশিক সমাকলন পদ্ধতি বলা হয়।

দুইটি অপেক্ষকের গুণফলের সমাকল = প্রথম অপেক্ষক (অপরিবর্তিত) × দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল

প্রথম অপেক্ষকের অন্তরকল সহগ এবং দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকলের গুণফলের সমাকল।

টীকা : কোনটি প্রথম অপেক্ষক এবং কোনটি দ্বিতীয় অপেক্ষক তাহা অভিজ্ঞতা বলিয়া দিবে। তবে সাধারণত যেটির সমাকল জানা সেটিকে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরা হয়।

৮.৬.১ উদাহরণমালা

উদা 1. সমাকলন করুন : $\int xe^x dx$

$\int xe^x dx = x\int e^x - \int\left(\frac{d}{dx}(x).\int e^x dx\right)dx$

$= xe^x - \int 1.e^x dx = xe^x - e^x + c$

x-কে প্রথম অপেক্ষক না ধরে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরলে পাই

$\int xe^x dx = e^x.\frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{d}{dx}(e^x)\int xdx\right)dx = e^x.\frac{x^2}{2} - \int e^x.\frac{x^2}{2}dx$

এখানে $\frac{1}{2}\int e^x.x^2 dx$ সমাকলনটি $\int xe^x dx$ হতেও কঠিন। সুতরাং x-কে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরা হবে না।

উদা 2. সমাকলন করুন : $\int \log xdx = \int 1.\log xdx$

যেহেতু $\log x$-এর সমাকলন জানা নাই তাই $\log x$-কে প্রথম অপেক্ষক এবং 1-কে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরা হল।

$$\int 1.\log x dx = \log x.\int 1.dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\log x).\int 1dx\right)dx$$

$$= x\log x - \int \frac{1}{x}.xdx = x\log x - x + c$$

উদা 3. সমাকলন করুন : $\int x^3 e^x dx$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int 3x^2 \cdot e^x dx = x^3 e^x 3x^2 \cdot e^x + \int 6xe^x dx$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left[xe^x - \int 1.e^x dx\right]$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$

উদা 4. সমাকলন করুন : $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}e^x dx = \int \frac{e^x}{x+1}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$

$$= \frac{1}{x+1}.e^x - \int \frac{1}{(x+1)^2}.e^x dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx + c$$

$$= \frac{1}{x+1}e^x + \cancel{\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx} - \cancel{\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx} + c = \frac{e^x}{x+1} + c$$

উদা 5. দেখান যে, $\int e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = e^x.f(x) + c$

$$\int e^x[f(x) + f'(x)]dx = \int e^x f(x)dx + \int f'(x)e^x dx$$

$$= e^x.f(x) - \int e^x.\cancel{f'(x)}dx + \int \cancel{f'(x)}e^x dx + c = e^x f(x) + c$$

কতিপয় আদর্শ সমাকল :

(A) $\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log\left|\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right|$

$$\int 1.\sqrt{x^2 + a^2}dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{2xx}{2\sqrt{x^2 + a^2}}dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\therefore\ 2\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2.\log\left|(x+\sqrt{x^2+a^2})\right| + c$$

বা, $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{x^2+a^3}\right)\right| + c$

(B) $\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

উপরের পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রমাণ করা যাবে।

(C) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

উদা 6. সমাকলন করুন : $I = \int\sqrt{25x^2+16}\,dx$

মনে করি, 5x = z $\therefore$ 54dx = dz

$$\therefore\ I = \frac{1}{5}\int\sqrt{z^2+4^2}\,dz = \frac{1}{5}\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2+4^2} + \frac{4^1}{2}\log\left|\left(z+\sqrt{z^2+4^2}\right)\right|\right] + c$$

$$= \frac{1}{10}.5x\sqrt{25x^2+16} + \frac{8}{5}\log\left|\left(5x+\sqrt{25x^2+16}\right)\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{25x^2+16} + \frac{8}{5}\log\left|\left(5x+\sqrt{25x^2+16}\right)\right| + c$$

উদা 7. $\int\sqrt{25-9x^2}\,dx$

মনে করি $3x = z$

$\therefore\ 3dx = dz$

$$I = \frac{1}{3}\int\sqrt{25-z^2}\,dz = \frac{1}{3}\left[\frac{z}{2}\sqrt{25-z^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{z}{5}\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{25-9x^2} + \frac{25}{6}\sin^{-1}\frac{3x}{5} + c$$

উদা 8. $\int\sqrt{8-2x-x^2}\,dx = \sqrt{9-2x-x^2-1}\,dx$

$= \int\sqrt{9-(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{9-(x+1)^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{(x+1)}{3} + c$

$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{8-2x-x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x+1}{3} + c$

উদা 9. $\int(x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx$

মনে করি, (x – 1) = $A\frac{d}{dx}\left(x^2-x+1\right)$+B=A.2x – A + B

$\therefore$ 2A = 1 এবং A – B = 1 $\therefore$ A = $\frac{1}{2}$ ও B = $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ I = $\int\left[\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}\right]\sqrt{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int(2x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-x+1}\,dx$

প্রথম সমাকলনটিতে $x^2 - x + 1 = z$ ধরলে পাই $\frac{1}{2}\int(2x-1)\sqrt{x^2-x+1} = \frac{1}{3}\left(x^2-x+1\right)^{3/2}$

এখন $\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{x^2-x+1}$

$+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}\log\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x+1}$

$\therefore$ I = $\frac{1}{3}(x^2-x+1)^{3/2} - \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{x^2-x+1} - \frac{3}{16}\log\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right| + c$

৮.৬.২ প্রশ্নমালা

1. x-এর সাপেক্ষে সমাকলন করুন :

(i) xe^{ax} [উঃ $\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+c$]

(ii) $x\log(1+x)$ [উঃ $\frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x)-\frac{1}{4}(x^2-2x)+c$]

(iii) $x^3 \log x$ [উঃ $\frac{1}{4}x^4\left(\log x - \frac{1}{4}\right) + c$]

(iv) $\frac{\log(x+1)}{(x+2)^2}$ [উঃ $(1 + x)^{-1}\{\log(1 + x)+1\}+c$]

(v) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ [উঃ $\frac{x}{1+\log x} + c$]

(vi) $(\log x)^2$ [উঃ $x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x + c$]

2. x-এর সাপেক্ষে সমাকলন করুন :

(i) $\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)} dx$ [উঃ $e^x . \frac{x-1}{x+1} + c$]

(ii) $\int \frac{xe^x}{(x^2-1)^2} dx$ [উঃ $\frac{e^x}{x+1} + c$]

3. সমাকলন করুন :

(i) $\int \sqrt{5-2x+x^2}\, dx$ [উঃ $(\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{5-2x+x^2} + 2\log(x-1) + \sqrt{5-2x+x^2} + c$]

(ii) $\int \sqrt{2ax+x^2}\, dx$ [উঃ $\frac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax+x^2} + \frac{1}{2}a^2 \sin^{-1}\frac{x-a}{a} + c$]

4. সমাকলন করুন :

(i) $\int (x-1)\sqrt{x^2-1}\, dx$ [উঃ $\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c$]

৮.৭ মূলদ ভগ্নাংশের সমাকলন (Integration of Rational Fraction)

উদাহরণ সমূহের মাধ্যমে সমাকলন পদ্ধতি বর্ণিত হল :

উদা 1. $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx$ এর মান নির্ণয় করুন। [এখানে হর একঘাত বাস্তব উৎপাদকের গুণফল]

মনে করি, $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ বা, x – 1 = A(x – 3) + B(x – 2)

x = 3 বসালে পাই, 3 – 1 = A × 0 + B.1 বা, B = 2

x = 2 বসালে পাই 2 – 1 = –A + B.0 ∴ A = –1

$$\therefore \int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx = A\int \frac{dx}{x-2} + B\int \frac{dx}{x-3} - \frac{dx}{x-2}$$

$$= 2\log(x-3) - \log(x-2) + c = \log\frac{(x-3)^2}{x-2} + c$$

উদা 2. $\int \frac{dx}{(x-a)^2(x-b)}$ [একঘাত পৌনঃপুনিক বাস্তব উৎপাদকের গুণফল]

মনে করি, $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}$

$\therefore$ I = $A(x-b) + B(x-a)(z-b) + C(x-a)^2$

মনে করি, x = a ∴ 1 + A(a – b) বা, $A = \frac{1}{a-b}$

মনে করি, x = b ∴ 1 + $C(b-a)^2$ ∴ $C = \frac{1}{(b-a)^2}$

উভয়পক্ষকে x^2-এর সহগ নিলে পাই, 0 = B + C

$$\therefore \quad B = \frac{1}{(a-b)^2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{(x-a)^2(x-b)} = A\int \frac{dx}{(x-a)^2} + B\int \frac{dx}{x-a} + C\int \frac{dx}{x-b}$$

$$= -A\frac{1}{(x-a)} + B\log(x-a) + C\log(x-b) + k$$

$$= -\frac{1}{(a-b)(x-a)} - \frac{1}{(a-b)^2}\log(x-a) + \frac{1}{(a-b)^2}\log(x-b) + k$$

$$= \frac{1}{(b-a)(x-a)} + \frac{1}{(a-b)^2}\log\frac{x-b}{x-a} + k$$

উদা 3. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)}$ [বাস্তব দ্বিঘাত উৎপাদকের গুণফল]

মনে করি, $\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\therefore$ x = A(x² + 4) + (Bx + C)(x – 1)

মনে করি, x = 1, $\therefore$ 1 = 5A বা, A = $\frac{1}{5}$

উভয়পক্ষ থেকে x-এর সহগ নিলে পাই

1 = –B + C

উভয় পক্ষ থেকে x^2-এর সহগ নিলে পাই

A + B = 0 $\therefore$ A = –B $\therefore$ B = $-\frac{1}{5}$

$\therefore$ C = 1 + B = 1 – $\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

অতএব $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)} = A\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}{x^2+4}dx$

$$= \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int\frac{X-4}{X^2+4}dx = \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int\frac{xdx}{x^2+4} - \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{5}\log(x-1) - \frac{1}{10}.\int\frac{2xdx}{x^2+4} - \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{5}\log(x-1) = \frac{1}{10}\log(x^2+4) = \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + k$$

উদা 4. $\int \frac{x^2}{x^4 - x^2 - 12} dx$

মনে করি, $x^2 = z$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4 - x^2 - 12} = \frac{z}{z^2 - z - 12} = \frac{z}{z^2 - 4z + 3z - 12} = \frac{z}{z(z-4) + 3(z-4)}$$

$$= \frac{z}{(z-4)(z+3)} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z+3}$$

$\therefore z = A(z + 3) + B(z - 4)$

মনে করি, $z = 4$, $\therefore 4 = 7A$ বা, $A = \frac{4}{7}$

মনে করি, $z = -3$, $\therefore -3 = -7B \therefore B = \frac{3}{7}$

$$\therefore \int \frac{x^2}{x^2 - x^2 - 12} dx = A\int \frac{dx}{x^2 - 4} + B\int \frac{dx}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{1}{7}\log\frac{x-2}{x+2} + \frac{\sqrt{3}}{7}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

উদা 5. $\int \frac{dx}{(x-2)^2 (x-1)^3}$

মনে করি, $x - 1 = z(x - 2)$

$= zx - 2z$

বা, $x(1 - z) = 1 - 2z$

$$\therefore x = \frac{1-2z}{1+z}, \therefore dx \frac{-2(1-z) + (1-z)}{(1-z)^2} dz$$

বা, $dx = \frac{-2+1}{(1-z)^2} dz = -\frac{1}{(1-z)^2} dz$ এখন $x - 2 = \frac{1-2z}{1-z} - 2$

$$= \frac{1-2z-2+2z}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

এবং $(x-1) = \frac{1-2z}{1-z} - 1 = \frac{1-2z-1+z}{1-z}$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-2)^2(x-1)^3} = -\int \frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{-z^3}{(1-z)^3}} dz$$

$$= +\int \frac{(1-z)^3}{z^3} dz = +\int \frac{1-z^3-3z(1-z)}{z^3} dz$$

$$= \int \left(+\frac{1}{z^3} - 1 - \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z} \right) dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + z - \frac{3}{z} 3\log z + c$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - 3\log\frac{x-2}{x-1} + \left(\frac{x-2}{x-1}\right) - \frac{x-1}{x-2} + c$$

উদা 6. $\int \frac{x^3 dx}{x^2+7x+12}$

x^3-কে $x^2 + 7x + 12$ দিয়ে ভাগ করে পাই

$$\frac{x^3}{x^2+7x+12} = x - 7 + \frac{\cdot 37x+84}{(x+3)(x+4)} = x - 7 + \frac{27}{x+3} + \frac{64}{x+4}$$

$$\therefore \int \frac{x^2 dx}{x^2+7x+12} = \int x dx - 7\int dx - 27\int \frac{dx}{x+3} + 64\int \frac{dx}{x+4}$$

$$= \frac{x^2}{2} = 7x - 27\log(x+3) + 64\log(x+4) + c$$

৮.৭.১ প্রশ্নমালা

মান নির্ণয় করুন :

1. $\int \frac{x-1dx}{(x+2)(x+3)}$ [উঃ $\frac{1}{5}\{3\log(x+2)+2\log(x-3)\}+c$]

2. $\int \frac{3xdx}{x^2-x-2}$ [উঃ $\log\{(x-2)^2(x+1)\}+c$]

3. $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)(x+2)^2}$ [উঃ $\frac{4}{x+2}+\log(x+1)+c$]

4. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ [উঃ $\frac{1}{x+1}+\log\frac{x}{x+1}+c$]

5. $\int \frac{xdx}{(x+1)(1+x^2)}$ [উঃ $-\frac{1}{2}\log(1+x)+\frac{1}{4}\log(1+x^2)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$]

6. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)(2x^2+1)}$ [উঃ $\tan^{-1}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(x\sqrt{2})+c$]

7. $\int \frac{dx}{x^4-1}$ [উঃ $\frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$]

8. $\int \frac{e^x dx}{e^x-3e^{-x}+2}$ [উঃ $\frac{1}{4}\log\{(e^x-1)(e^x+3)^3\}+c$]

9. $\int \frac{x^3dx}{x^4+3x^2+2}$ [উঃ $\log(x^2+2)-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+c$]

10. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^3}$ [উঃ $-\left(\frac{x+2}{x+1}\right)-3\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right)+3c\left(\frac{x+1}{x+2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2+c$]

৮.৮ নির্দিষ্ট সমাকল (Definite Integral)

পূর্ব আলোচনায় সমাকলনকে অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়ারূপে সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে। এক্ষনে নির্দিষ্ট সমাকলকে একটি সমষ্টির সীমারূপে সংজ্ঞা দেওয়া হবে।

সংজ্ঞা : মনে করি, $f(x)$ অপেক্ষকটি (a,b) পরিসরে সংজ্ঞাত। a, b দুইটি সসীম সংখ্যা এবং $a < b$ এবং (a,b) পরিসরে $f(x)$ সন্তত। (a, b) পরিসরকে $a + h$, $a + 2h$, ... $a + \overline{n-1}\,h$ বিন্দু দ্বারা h দৈর্ঘ্যের সমান n-সংখ্যক ভাগে ভাগ করা হল। এখানে $nh = b - a$.

এখন $\lim\limits_{h\to 0} h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+...+f(a+\overline{n-1}h)]$

$$= \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=0}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}.r)$$

সমষ্টির সীমাকে (যেখানে সীমা বর্তমান) $f(x)$-এর a ও b সীমার মধ্যে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা ধরা হয়। একে $\int_a^h f(x)\,dx$ চিহ্নের দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অর্থাৎ $\lim\limits_{h\to 0} h.\sum\limits_{r=0}^{n-1} hfd(a+rh) = \int_a^h f(x)\,dx$

a-কে সমাকলের নিম্নসীমা এবং b-কে ঊর্ধ্বসীমা বলে।

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=1}^{n} f(a+rh)$ এরূপও লেখা হয়।

উদা 1. সংজ্ঞা থেকে $\int_a^b k\,dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

এখানে $f(x) = k$ (ধ্রুবক) $\therefore \int_a^h k\,dx = \lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=1}^{n} f(a+rh)$

$$= \lim_{h\to 0} h.\sum_{r=1}^{n} k = \lim_{h\to 0} h.nk = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{\cancel{n}}.\cancel{n}k = k(b-a)$$

উদা 2. সংজ্ঞা থেকে $\int_0^1 x^2 dx$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সংজ্ঞা থেকে $\int_0^1 x^2 dx = \lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=1}^{n} (rh)^2, (nh=1)$

$$= \lim_{h\to 0} h.[1^2h^2 + 2^2h^2 + \ldots + n^2h^2]$$

$$= \lim_{h\to 0} h^3[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2]$$

$$= \lim_{h\to 0} h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{h\to 0}(2n^3h^3 + 3n^2h^2h + nh.h^2)$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{h\to 0}(2+3h+h^2) \qquad [\therefore \text{ nh} = 1]$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

উদা 3. সংজ্ঞা থেকে $\int_a^b e^x dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সংজ্ঞা থেকে $\int_a^b e^x dx = \lim_{h\to 0} h.\sum_{r=0}^{n-1} e^{a+rh}, (nh = b-a)$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^{+a} + e^{a+h} + \ldots + e^{a+n-1h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 - e^x\left(1+e^h+\ldots+e^{(n-1)h}\right) = \lim_{h\to 0} h.e^a.\frac{e^{nh}-1}{e^h-1} = e^a.\left(e^{h-a}-1\right).\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}$$

$$= e^a(e^h.e^a.1).1 \quad \left[\because \lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1} = 1\right]$$

$$= e^b - e^a$$

৮.৮.১ প্রশ্নমালা

সংজ্ঞা থেকে সমাকলনগুলির মান নির্ণয় করুন :

1. $\int_a^b e^{-x} dx$ [উঃ $e^{-a} - e^{-b}$]

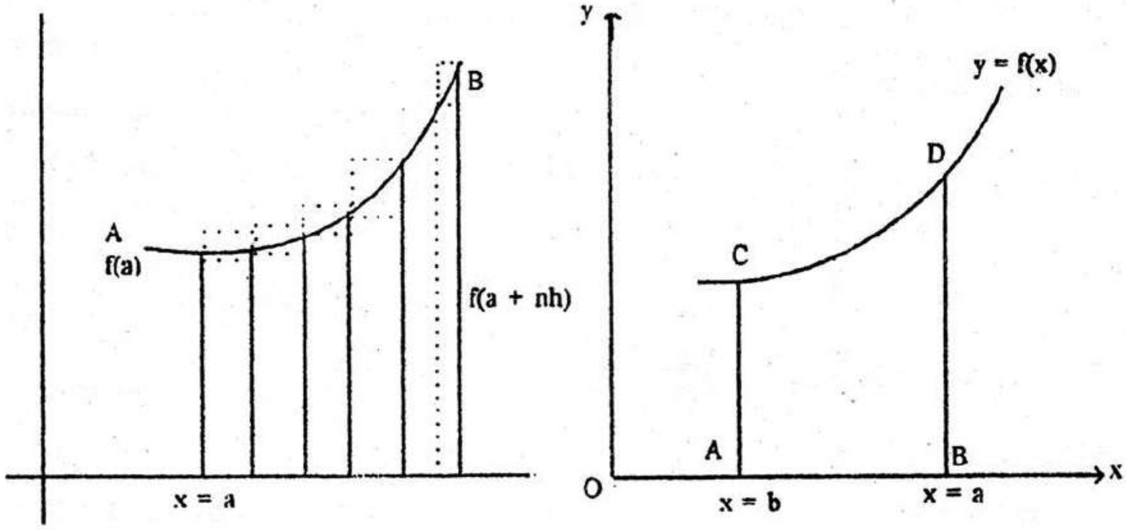
2. $\int_0^1 e^{2x} dx$ [উঃ $\frac{1}{2}(e^2-1)$]

3. $\int_0^1 x^3 dx$ [উঃ $\frac{1}{4}$]

4. $\int_0^1 (ax+b) dx$ [উঃ $\frac{1}{2}a+b$]

5. $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ [উঃ $\frac{2}{3}$]

৮.৮.২ নির্দিষ্ট সমাকলনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা



নির্দিষ্ট সমাকলনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

$\int_a^b f(x)dx, x = a$-তে কোটি AC, $x = b$-তে কোটি BD, x অক্ষ এবং $y = f(x)$ বক্ররেখার দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলকে নির্দেশ করে।

এখানে AB বক্ররেখাটির সাপেক্ষে

$h[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,h)]$ হল

$x = a, x = a + h, \ldots x = a + (n - 1)h$ এই কোটি সমূহ এবং x-অক্ষ দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্র সমূহের ক্ষেত্রফলের সমান।

আবার $h[f(a + h) + f(a + 2h) + \ldots + f(a + nh)]$

এটি হল x-অক্ষ ও $x = a + h, x = a + 2h, \ldots x = a + nh$

এই কোটি সমূহ দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল সমূহের সমষ্টি।

৮.৮.৩ সমাকল গণিতের মূল উপপাদ্য (Fundamental Theory of Integral Calculus)

যদি $f(x)$ (a, b) পরিসরে একটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং যদি একটি অপেক্ষক এমন থাকে

.. (a, b) পরিসরে $\phi'(x) = f(x)$ তবে $\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a) = [\phi(x)]_a^b$

(প্রমাণ দেওয়া হল না।)

উদা 1. $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[1^{2/3} - 0^{3/2}\right]$

$$= \frac{2}{3}$$

উদা 2. $\int_0^3 x^3 \sqrt{1+3x^4}\,.dx$

মনে করি, $1 + 3x^4 = z$

$\therefore \quad 1zx^3 dx = dz$

এখানে ঊর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমা পরিবর্তন করতে হবে।

যখন $x = 0, z = 1$, আবার যখন $x = 1, z = 4$

$\therefore \frac{1}{12}\int_1^4 z^{1/2} dz = \frac{1}{12}\left[\frac{2}{3} z^{3/2}\right] = \frac{1}{18}\left[4^{3/2} - 1^{3/2}\right] = \frac{7}{18}$

উদা 3. $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{a}\left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0\right]$

$$= \frac{1}{3}.\frac{\pi}{4}$$

৮.৮.৪ প্রশ্নমালা

নিম্নলিখিত সমাকলগুলি নির্ণয় করুন :

1. $\int_0^1 xe^x dx$ [উঃ 1]

2. $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\, dx$ [উঃ $\frac{1}{2}\pi a^2$]

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\frac{1}{4}$]

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ [উঃ $2^{5/2} / 3$]

5. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ [উঃ $\sqrt{2}-1$]

6. $\int_1^2 \frac{dx}{x-(1+2x)^2}$ [উঃ $\log\frac{6}{5}-\frac{2}{15}$]

7. $\int_8^{15} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ [উঃ $\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}$]

8. $\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ [উঃ $\log {}^3\!/\!_2$]

9. $\int_2^0 \left\{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx$ [উঃ $e-\frac{2}{\log 2}$]

10. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$ [উঃ $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$]

৮.৮.৫ নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্ম

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz$

(2) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ a < c < b$

(4) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

(5) $\int_0^{na} f(x)dx = n\int_0^a f(x)dx$ যখন f(x) = f(a + x) হয়।

(6) $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$

(7) $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx$

$= 0$, যদি $f(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক হয়

$= 2\int_0^a f(x)$, যদি $f(x)$ যুগ্ম অপেক্ষক হয়।

উদা.1. প্রমাণ করুন : $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$

মনে করি, a + b – x = z $\therefore$ –dx = dz

যখন x = a, z = b আবার যখন x = b, z = a

$\therefore \int_b^a f(z)(-dz) = -\int_b^a f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$ [ধর্ম (2)]

$= \int_a^b f(x)dx$ [ধর্ম (1)]

উদা 2. দেখান যে $\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 0$

এখানে $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2}$ $\therefore f(-x) = -x\sqrt{a^2-x^2} - f(x)$

অর্থাৎ f(x) অযুগ্ম অপেক্ষক।

$\therefore \int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx - 0$ [ধর্ম (7)]

৮.৮.৬ প্রশ্নমালা

দেখান যে :

(1) $\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx = \int_a^b f(x)dx$

(2) $\int_a^b f(nx)dx = \dfrac{1}{n}\int\limits_{na}^{nb} f(x)dx$

(3) $\int_0^1 \dfrac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \dfrac{\pi}{8}\log 2$

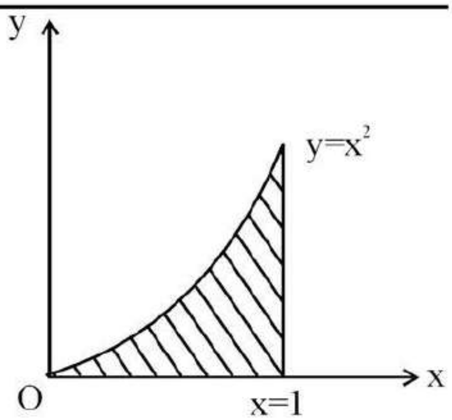
(4) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x\, dx = 0$

(5) $\int_0^{r/4} \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = \dfrac{\pi}{4}$

(6) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sin\, x)dx$

৮.৯ সমাকলনের দ্বারা ক্ষেত্রফল নির্ণয়

উদা. 1. x অক্ষ, মূলবিন্দু হতে x = 1 দূরে অংকিত কোটি এবং $y = x^2$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 y\,dx = \int_0^1 x^2 dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

উদা 2. x অক্ষ, x = a > 0, x = b > 0তে কোটিদ্বয় এবং $xy = c^2$ বক্ররেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

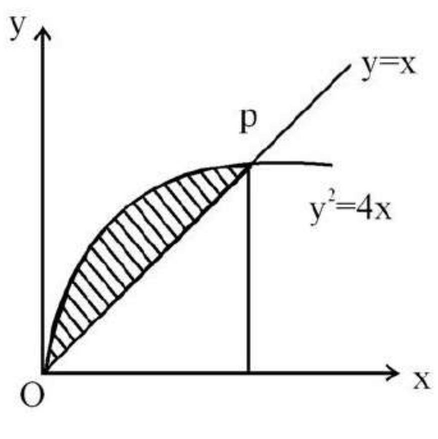
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_a^b \frac{c^2}{x} dx = c^2 [\log x]_a^b$

$$= c^2[\log b - \log a] = c^2.\log\frac{b}{a} \text{ বর্গ একক।}$$

উদা 3. $y^2 = 4x$ বক্ররেখা এবং y = x সরলরেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

P বিন্দুর x স্থানাঙ্ক : $x^2 - 4x = 0$ বা, x = 0, x = 4

∴ P বিন্দুর x স্থানাঙ্ক 4



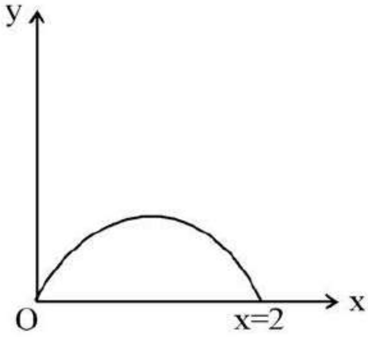
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল (চিত্র থেকে) $= \int_0^4 2\sqrt{x}\,dx - \int_0^4 x dx$

$$= 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\times 4^{3/2} - \frac{4^2}{2}$$

$$= \frac{32}{2} - 8 = \frac{32-4y}{3} = \frac{8}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

উদা 4. y = x (2 – x) বক্ররেখা এবং x-অক্ষরেখা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

x = 0 এবং x = 2-তে y = 0



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 x(2-x)dx$

$= \int_0^2 (2x-x^2)dx = \left[2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^2$

$= 4-\frac{8}{3}=\frac{12-8}{3}=\frac{4}{3}$ বর্গ একক।

৮.৯.১ প্রশ্নমালা

(1) $y = (x-1)(4-x)$ বক্ররেখা এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক]

(2) x-অক্ষ, $x = 1$, $x = 9$ কোটি দ্বারা $y^2 = x$ বক্ররেখার সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ $\frac{52}{3}$ বর্গ একক]

(3) দেখান যে অক্ষদ্বয় এবং $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রফল $\frac{a^2}{6}$ ।

(4) $y = 3x$, x-অক্ষ এবং $x = 2$-তে কোটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ 6 বর্গ একক]

(5) $y^2 = x^3$ বক্ররেখা এবং $y = 2x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।[উঃ $\frac{64}{5}$]

(6) $y = x^3 + x + 1$ বক্ররেখা, x অক্ষ এবং $x = 1$, $x = 6$ বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত কোটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। [উঃ $346\frac{1}{4}$ বর্গ একক]

(7) $y = x^3$ বক্ররেখা এবং $y = x$ সরলরেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ $\frac{1}{2}$ বর্গ একক]

(8) $y = (x-3)(x-7)$ বক্ররেখা এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ $\frac{32}{3}$ বর্গ একক]

(9) $y = 20 - x^2$ এবং $y = x^4$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ $61\frac{13}{15}$ বর্গ একক]

(10) দেখান যে $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ অধিবৃত্তদ্বয়ের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক।

৮.১০ অনুশীলনী

1. x-এর কোন মানগুলির জন্য (x – 1) (3 – x) অপেক্ষকটি ঊর্ধ্ব চরম হবে?
2. x-এর কোন মানগুলির জন্য $x(6 - x)^2$ অপেক্ষকটি নিম্ন চরম হবে?
3. প্রমাণ কর x-এর বাস্তব মানের জন্য $y = \frac{e^x}{1+e^x}$ অপেক্ষকটির কোন চরম মান থাকবে না।
4. **শূন্যস্থান পূরণ করুন :**

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x + x^3}{x} =$ ______________

(ii) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^{16} - 4^{16}}{x - 4} =$ ______________

(iii) $\lim\limits_{x \to a} x^2 =$ ______________

(iv) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x^2 - 4} =$ ______________

(v) $f(x) = x^2$, $x = 0$ বিন্দুতে_________

(vi) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x} \frac{\sin x}{2} =$ _________

(vii) tan x অপেক্ষকের অসন্ততির বিন্দু _________

5. (ক) $y = x^2$, $y = -2x^2$ এর লেখচিত্র আঁকুন।

(খ) $y = (x - 3)^2 + 2$, $y = -(x - 3)^2 + 2$ এর লেখচিত্র আঁকুন।

(গ) $y = x^3 - x$ এর লেখচিত্র আঁকুন।

(ঘ) $y = \frac{1}{x}$ এর লেখচিত্র আঁকুন।

6. নিম্নোক্ত অপেক্ষকগুলির সমাকলন নির্ণয় করুন :

(i) $\frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{x^2}$ (ii) $\left(x^x\right)^x$ (iii) $\sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$

7. দেওয়া আছে $\sqrt{6{\cdot}25} = 2{\cdot}5$ তাহলে $\sqrt{6{\cdot}33}$ এর মান নির্ণয় করুন।
8. (i) দেখান যে $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{\log(ax + b)}{a} + c$

(ii) $\int x^2 e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$

(iii) $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \log \frac{x-a}{x-b} + c, \quad a \neq b$

9. নিম্নোক্ত অনির্দিষ্ট সমাকলনগুলি নির্ণয় করুন :

(i) $\int \sin(2x+1)dx$ (ii) $\int \sqrt{3x-2}\, dx$ (iii) $\int x \cos x\, dx$ (iv) $\int x^3 e^{-x} dx$

(v) $\int \left(x^2+x+1\right) \cos x\, dx$

10. (i) $\sqrt{x} = z$ বসিয়ে $\int \frac{xdx}{x+\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(ii) cos = z বসিয়ে $\int \frac{\cos^3 x}{\sin 4} xdx$ এর মান নির্ণয় করুন।

11. $\int e^{2x} \sin 3x$ এর মান নির্ণয় করুন।

12. দেখান যে, $\int_r^k (ax+b)^2 dx = \frac{(ak+b)^3 - (an+b)^3}{3a}$

13. দেখান যে, $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)^3} = \frac{3}{8}$

14. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

15. $y = \frac{1}{2}x^2$ পরাবৃত্তটি $x^2 + y^2 = 8$ বৃত্তটিকে যে দুইটি অংশে বিভক্ত করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

16. $y^2 = ax$ পরাবৃত্তটি $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্তটিকে যে তিনটি অংশে বিভক্ত করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

৮.১১ গ্রন্থপঞ্জী (Suggested Reading)

1. বাণিজ্যিক গণিত ও পরিসংখ্যান—ড. রণজিৎ ধর, রিখিয়া ধর
2. ব্যবসায় গণিত ও পরিসংখ্যান—সৌরেন্দ্রনাথ দে
3. Business Mathematics and Statistics — J. Chakraborti
4. Introduction to Business Mathematics — P.K. Giri and J. Banerjee
5. ব্যবসায়িক গণিত — ঘোষ ও সাহা